О.В.Черницька

Комп’ютерна дискретна математика. Конспект лекцій

Дніпро
Ліра
2022

Рекомендовано до друку рішенням засідання
вченої ради факультету прикладної математики
Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара
(протокол № 10 від 29.03.2022)

Рецензенти:

Говоруха В.Б. – проф., д-р фіз.-мат. наук, завідувач кафедри вищої математики та фізики Дніпровського державного аграрно-економічного університету;
Наконечна Т.В. – доц., канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету імені Олеся Гончара.

Конспект містить 16 лекцій з дисципліни «Комп'ютерна дискретна математика». Лекції присвячені елементам теорії множин, відношенням та відображенням, булевим функціям та деяким питанням теорії графів. Кожній лекції передує план лекції та список термінів.

Для студентів спеціальностей 121 інженерія програмного забезпечення та 126 інформаційні системи та технології.

Вступ

Конспект лекцій з дисципліни «Комп'ютерна дискретна математика» створено для студентів спеціальностей 121 інженерія програмного забезпечення та 126 інформаційні системи та технології. Він буде корисним як для очного, так і для дистанційного навчання. Для вивчення дисципліни достатньо знань з шкільного курсу математики.

Конспект містить 16 лекцій. Він починається з елементів теорії множин, продовжується розглядом відношень, відображень, булевих функцій, нормальних форм тощо. Значна частина лекцій присвячена елементам теорії графів. Кожній лекції предує план лекції та список термінів, з якими будуть знайомитися студенти. Закінчується посібник списком рекомендованої літератури, за допомогою якої можна поглибити свої знання з комп'ютерної дискретної математики.

Графіки в тексті виконані за допомогою графічного калькулятора GeoGebra (https://www.geogebra.org). Рисунки в тексті виконані за допомогою програми LightShot і засобів платформи Microsoft Teams.

ЛЕКЦІЯ 1

ТЕМА: Елементи теорії множин

План лекції

Множина (первісне поняття). Позначення множин, позначення елементів. Приклади множин.

Способи подання множин: 1) словесний, 2) список (перелік), 3) властивість, 4) породжувальна процедура, 5) аналітичний.

Парадокс Рассела.

Порожня множина. Універсум. Підмножина. Рівні множини. Деякі властивості множин (транзитивність). Діаграми Ейлера, Венна.

Операції над множинами: 1) об'єднання, 2) перетин, 3) різниця, 4) симетрична різниця, 5) доповнення. Для кожної операції означення, позначення, діаграма, приклади, властивості операції. Узагальнення операції на випадок числа множин більше двох для об'єднання та перетину.

Декартовий добуток множин (означення, позначення, приклади, властивості операції, узагальнення на випадок числа множин більше двох).

Скінченні та нескінченні множини. Потужність множини.

Список термінів

1. **Множина**
2. **Порожня множина**
3. **Універсум**
4. **Підмножина**
5. **Рівні множини**
6. **Транзитивність операції включення**
7. **Діаграма Ейлера, Венна**
8. **Операція об'єднання множин**
9. **Операція перетину множин**
10. **Операція різниці множин**
11. **Операція симетричної різниці множин**
12. **Операція доповнення множини**
13. **Декартів добуток множин**
14. **Декартів квадрат**
15. **Кон'юнкція**
16. **Диз'юнкція**
17. **Імплікація**
18. **Еквіваленція**
19. **Комутативність операцій об'єднання, перетину**
20. **Асоціативність операцій об'єднання, перетину**
21. **Дистрибутивні закони**
22. **Закон подвійного заперечення**
23. **Закони де Моргана**
24. **Потужність множини**

Елементи теорії множин

Засновник теорії множин – німецький математик Георг Кантор (1845-1918).

Множина – це сукупність об'єктів, які об'єднані деякою загальною властивістю.

Множина – одне з первісних понять математики.

Множина визначена, якщо для будь-якого об'єкта можна встановити, чи є він елементом цієї множини, чи ні.

Позначення множин: великі латинські літери A, B, X,… ; великі латинські літери з індексами A_1, A_2,… .

Позначення елементів множин: маленькі латинські літери $a, b, x \ldots$;

маленькі латинські літери з індексами $a_1, a_2, \dots$.

Позначення того факту, що елемент x належить множині A: $x \in A$.

Позначення того факту, що елемент x не належить множині A: $x \overline{\in} A$, $x \notin A$.

Приклади множин:

1) множина натуральних чисел,
2) множина цифр десяткової системи,
3) множина непарних чисел.

Способи подання множин:

1) **Словесний** – за допомогою опису характеристичних властивостей, які мають елементи множин.

Всі приклади вище – словесне подання.

2) **Список** (перелік) усіх елементів (пишеться у фігурних дужках).

Приклади.

а) $\{1,2,3,...\}$

б) $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

в) $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, ...\}$

3) За допомогою **властивості**, яка об'єднує всі елементи множини. Записується так:

$$\{b;\alpha\} \text{ або } \{b|\alpha\}.$$

Цей запис означає, що множина містить елементи b, які мають властивість α.

Приклади.

а) $\{x | x - \textit{натуральне число}\}$

б) $\{x | x - \textit{цифра десяткової системи}\}$

в) $\{x | x - \textit{непарне число}\}$

4) За допомогою **породжувальної процедури** (алгоритму), що описує спосіб отримання елементів множини із вже існуючих елементів або інших об'єктів, якщо такий спосіб існує.

Приклад. Для $\{1,2,3,...\} = N$ породжувальна процедура така:

– $1 \in N$,

– якщо $x \in N$, то $x+1 \in N$.

5) **Аналітичний спосіб**. Множина подається за допомогою аналітичного виразу, який містить позначки множин та символи операцій над ними.

Інтуїтивні уявлення щодо множин недосконалі. Їх недосконалість ілюструє **парадокс Рассела**: нехай А множина всіх таких множин X, що X не є елементом X. Якщо А не є елементом А, то за означенням А є елементом А. Якщо А є елементом А, то А – одна з тих множин X, які не є елементами самих себе, тобто А не є елементом А.

Множина може зовсім не містити елементів, наприклад,

$$A = \left\{ x \in R \middle| x^2 + 1 = 0 \right\}.$$

Для позначення цього факту вводять поняття **порожньої множини**, $A = \varnothing$.

В означенні конкретної множини явно або неявно обмежується сукупність об'єктів, що є допустимими. Сукупність допустимих об'єктів називається **універсумом**, позначається U.

Універсумом U арифметики є множина дійсних чисел, універсумом U зоології є множина всіх тварин.

Частину множини називають підмножиною.

Означення. Множину A називають **підмножиною** множини B, якщо кожний елемент множини A є елементом множини B.

$\subset$ – символ строгого включення.

$\subseteq$ – символ нестрогого включення.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x \left(x \in A \Rightarrow x \in B \right),$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \left(x \in A \Rightarrow x \in B \right) \& \left(A \neq B \right),$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \left(A \subseteq B \right) \& \left(A \neq B \right).$$

Означення. Дві множини називаються **рівними**, якщо вони складаються з тих самих елементів:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \left(x \in A \Leftrightarrow x \in B \right).$$

Приклад. $\{1,2,3\} = \{2,3,1\}$.

Еквівалентним наведеному є таке означення: множини рівні тоді й тільки тоді, коли вони є підмножинами одна одної:

$$A = B \Leftrightarrow \left(A \subseteq B \right) \wedge \left(B \subseteq A \right).$$

Деякі властивості множин

1) Порожня множина є підмножиною будь-якої множини

$$\varnothing \subseteq A.$$

2) Порожня множина єдина.
3) Будь-яка множина є підмножиною універсуму

$$A \subseteq U.$$

4) Будь-яка множина є підмножиною самої себе

$$A \subseteq A.$$

5) Транзитивність.

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C.$$

При роботі з множинами зручно використовувати мову **діаграм Ейлера, Венна**. На цій мові універсум зображають у вигляді прямокутника, а множини – як круги, що знаходяться у цьому прямокутнику.

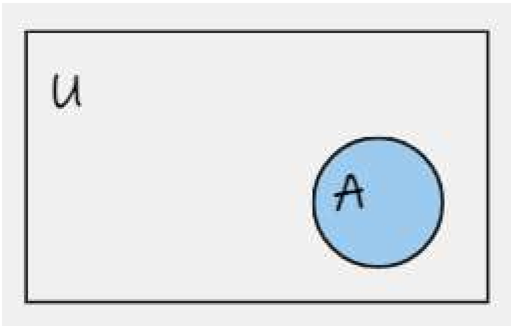


Рисунок 1 – Універсум U і множина A

Операції над множинами

1. Об’єднання

Означення. Об’єднанням множин A та B називається множина, яка містить всі елементи множини A, містить всі елементи множини B та не містить жодних інших елементів. Позначається: $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}.$$

Діаграму операції об’єднання наведено на рис.2.

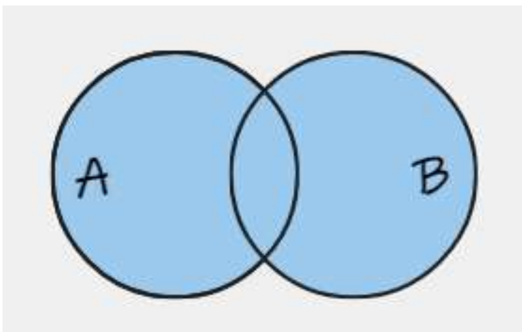


Рисунок 2 – Об’єднання множин A та B

Тут і далі ми використовуємо символи логічних операцій:

– кон’юнкція $\wedge$ «і»,
– диз’юнкція $\vee$ «або»,
– імплікація $\Rightarrow$ «випливає»,
– еквіваленція $\Leftrightarrow$ «рівносильно».

Приклад. $A=\{2,4,5\}$, $B=\{2,8,9\}$, $A\cup B=\{2,4,5,8,9\}$.

– У множині елементи не повторюються.
– У множині елементи не упорядковуються.

Властивості операції об’єднання

1) $\varnothing \cup A = A$
2) $A\cup U = U$
3) $A\cup A = A$
4) $A\cup B = B\cup A$ **(комутативність)**
5) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ **(асоціативність)**

З 4) та 5) випливає, що об’єднання кількох множин можна виконати, послідовно об’єднуючи їх, причому порядок не важливий:

$$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=(B\cup C)\cup A.$$

Пишуть:

$$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i.$$

2. Перетин

Означення. Перетином двох множин, А та В, називається множина, що складається з тих і тільки тих елементів, які належать одночасно множині А та множині В. Позначається: $A\cap B$.

$$A\cap B=\{x \mid x\in A\wedge x\in B\}.$$

Діаграму операції перетину наведено на рис.3.

Приклад. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{3,10\}$, $A\cap B=\{3\}$.

Властивості операції перетину

1) $\varnothing\cap A=\varnothing$
2) $A\cap U = A$
3) $A\cap A = A$
4) $A\cap B = B\cap A$ **(комутативність)**
5) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$ **(асоціативність)**
6) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
7) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

6) та 7) – це **дистрибутивні** закони.

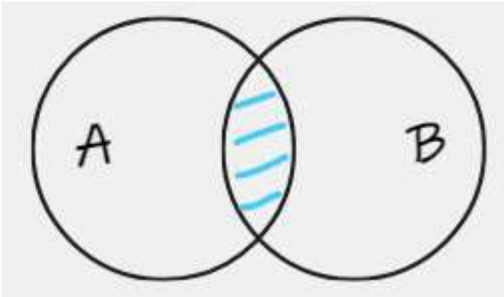


Рисунок 3 – Перетин множин A та B

Узагальнення операції перетину на випадок n множин:

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i .$$

3. Різниця

Означення. Різницею множин A та B називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині A та не належать множині B. Позначається: $A \setminus B$.

$$A \setminus B = \{x | x \in A \& x \notin B\}.$$

Означення. Різницею множин B та A називається множина, яка складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині B та не належать множині A. Позначається: $B \setminus A$.

$$B \setminus A = \{x | x \in B \wedge x \notin A\}.$$

Діаграми операцій $A \setminus B$ та $B \setminus A$ наведено на рис.4 та 5.

Операція різниці не є комутативною: $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Приклад. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2\}$.

$A \setminus B = \{3\}$, $B \setminus A = \varnothing$. Маємо $A \setminus B \neq B \setminus A$.

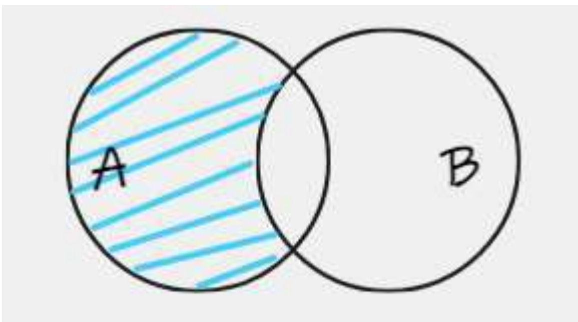


Рисунок 4 – Різниця множин A та B

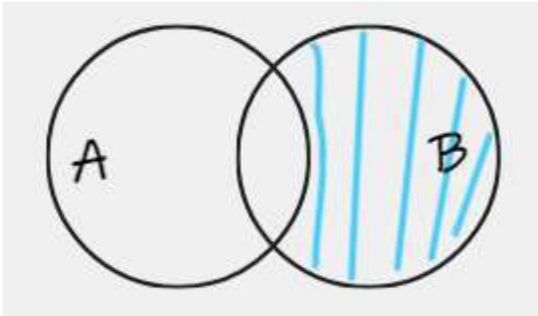


Рисунок 5 – Різниця множин B та A

4. Симетрична різниця

Означення. Симетричною різницею множин A та B називається множина, що складається з усіх елементів множини A, які не належать множині B, й усіх елементів множини B, які не належать множині A, та яка не містить ніяких інших елементів.

Позначається: $A \oplus B$, $A \Delta B$.

Діаграму операції симетричної різниці наведено на рис.6.

$$A \oplus B = \{x \mid x \in A \setminus B \vee x \in B \setminus A\}.$$

$$A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A),$$

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Два останні рядки – це приклади аналітичного способу подання множин.

Властивості операції симетрична різниця

1) $A \oplus B = B \oplus A$ (комутативність)

2) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (асоціативність)

3) $A \oplus \varnothing = \varnothing \oplus A = A$

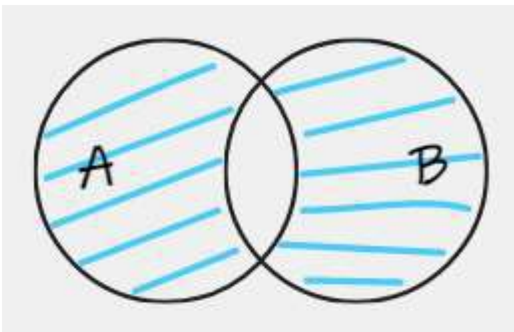


Рисунок 6 – Симетрична різниця множин A та B

5. Доповнення

Означення. Доповненням множини A називають множину, що містить усі елементи універсуму, за винятком елементів множини A. Позначається: $\overline{A} = U \setminus A$.

$$\overline{A} = \{x \in U : x \notin A\}.$$

Діаграму операції доповнення наведено на рис.7.

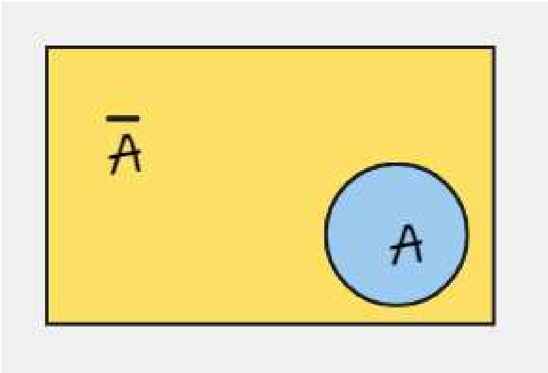


Рисунок 7 – Множина A та її доповнення $\overline{A}$

Властивості операції доповнення

1) $\overline{\varnothing} = U$

2) $\overline{U} = \varnothing$

3) $\overline{\overline{A}} = A$ (закон подвійного заперечення)

4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (закон де Моргана)

5) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (закон де Моргана)

6) $A \cup \left(B \cap \overline{B}\right) = A$

7) $A \cap \left(B \cup \overline{B}\right) = A$

6. Декартів добуток множин

Означення. Декартовим (прямим) добутком множин A і B називають множину всіх упорядкованих пар елементів (a,b), з яких перший елемент належить множині A, а другий – множині B. Позначається: $A \times B$.

$$A \times B = \{(x,y) | x \in A \wedge y \in B\}.$$

$(x,y) \neq (y,x)$

$A \times B \neq B \times A$ операція не комутативна.

$A \times A = A^2$ – декартів квадрат.

Приклад. $A = [2,4]$, $B = [1,5]$. $A \times B = [2,4] \times [1,5]$ – прямокутник. Цей прямокутник зображено на рис.8.

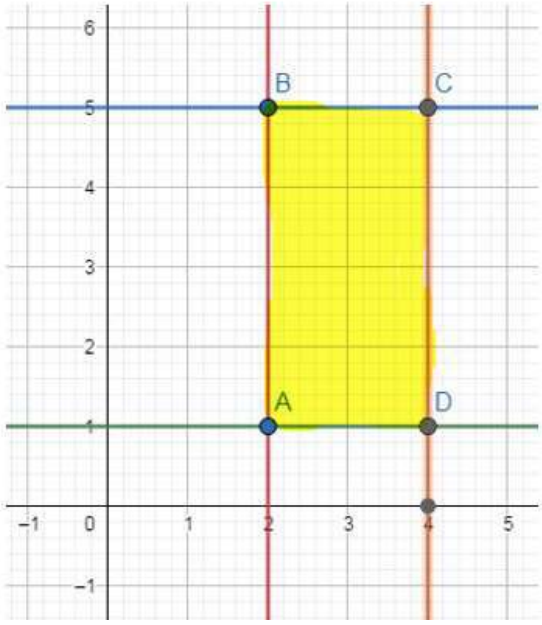


Рисунок 8 – Декартів добуток множин А та В

Позначення: R – множина дійсних чисел, $R \times R = R^2$ – площина (множина всіх точок площини), $R \times R \times R = R^3$ – простір (множина всіх точок простору).

Декартовим добутком множин $A_1, A_2, ..., A_n$ називають множину всіх упорядкованих послідовностей із n елементів $(a_1, a_2, ..., a_n)$, де $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$. Позначається: $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \left\{ (a_1, a_2, ..., a_n) : a_i \in A_i, \forall i = \overline{1,n} \right\}.$$

Позначення: $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$.

Якщо $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, то $\underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n} = A^n$.

Прямий добуток не має властивості асоціативності, але має місце властивість дистрибутивності відносно операцій $\cup, \cap, \backslash$:

$$(A_1 \cup A_2) \times B = (A_1 \times B) \cup (A_2 \times B),$$

$$(A_1 \cap A_2) \times B = (A_1 \times B) \cap (A_2 \times B),$$

$$\left(A_1 \setminus A_2\right) \times B = \left(A_1 \times B\right) \setminus \left(A_2 \times B\right).$$

Множини бувають скінченними та нескінченними. Множина називається **скінченною**, якщо число її елементів скінченне. Будемо це число елементів називати **потужністю** множини. Позначаємо потужність множини А символом $|A|$. Якщо число елементів множини А не є скінченним, то множина А називається **нескінченною**.

Для скінченної множини $|A| < \infty$,

для порожньої множини $|\varnothing| = 0$,

для n - елементної множини $|A| = n$,

для нескінченної множини будемо писати $|A| = \infty$.

ЛЕКЦІЯ 2

ТЕМА: Булева алгебра. Бінарні відношення

План лекції

Булеан множини. Формула для потужності булеана, доведення формули. Замкненість булеана відносно операцій об'єднання, перетин, доповнення. Булева алгебра. Система тотожностей 1-7 булевої алгебри (система аксіом). Двоїста система аксіом 1′ - 7′.

Бінарне відношення на парі множин А та В. Бінарне відношення на множині А. Подання бінарних відношень графами, матрицями. Відношення арності *n*. Операція об'єднання бінарних відношень. Операція перетину бінарних відношень. Операція доповнення бінарного відношення. Операція обернення бінарного відношення. Операція добутку бінарних відношень.

Список термінів

1. **Булеан множини**
2. **Потужність булеана**
3. **Біномний коефіцієнт**
4. **Біном Ньютона**
5. **Замкненість булеана**
6. **Булева алгебра**
7. **Система аксіом 1-7 булевої алгебри**
8. **Двоїста система аксіом 1′ - 7′.**
9. **Бінарне відношення**
10. **Відношення арності *n***

11. Об’єднання бінарних відношень
12. Перетин бінарних відношень
13. Доповнення бінарного відношення
14. Обернення бінарного відношення
15. Добуток бінарних відношень

Булева алгебра

Означення. Множину, елементами якої є всі підмножини множини A, називають **булеаном** множини A, позначають ß(A),

$$ß(A)=\{B : B \subseteq A\}.$$

Інше позначення для булеана множини A: 2^A.

Приклад. $A = \{a,b,c\}$

ß(A) = $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$

$|A| = 3$, |ß(A)|= 8 = 2^3.

Взагалі, якщо $|A| = n$, |ß(A)|= 2^n.

Доведення. |ß(A)|= $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$, потужність булеана дорівнює сумі біномних коефіцієнтів. Сума біномних коефіцієнтів дорівнює 2^n. Отже, |ß(A)|= 2^n.

Покажемо, що справедлива формула

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n.$$

Біном Ньютона $(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + ... + C_n^n a^n$ – це формула, яка справедлива для довільних x та a. Нехай $x = a = 1$. Отримаємо $(1+1)^n = C_n^0 1^n + C_n^1 1^{n-1} 1 + C_n^2 1^{n-2} 1^2 + ... + C_n^n 1^n =$ $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n$, що й треба було.

Нехай $U =$ ß(A). Якщо над елементами булеана проводити операції $\cup, \cap, \overline{}$ (об’єднання, перетин, доповнення), то результатами цих операцій будуть також елементи булеана. Цю властивість множини називають **замкненість** (відносно операцій). ß(A) є замкненим відносно операцій $\cup, \cap, \overline{}$.

Булеан множини A разом з операціями $\cup, \cap, \overline{}$ називають булевою алгеброю. (ß(A), $\cup, \cap, \overline{}$) – булева алгебра.

Система тотожностей

1. $\overline{\overline{A}} = A$ **(закон подвійного заперечення)**

2. $A \cup A = A$

3. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (асоціативність)

4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивність)

5. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (закон де Моргана)

6. $A \cup B = B \cup A$ (комутативність)

7. $A \cup (B \cap \bar{B}) = A$

Система тотожностей обирається так, що будь-яка інша тотожність з операціями $\cup, \cap, \bar{}$ є їх наслідком. Якщо це так, то систему тотожностей називають системою аксіом, а тотожності – аксіомами.

Тотожність є наслідком системи аксіом, якщо її можна отримати з деякої аксіоми шляхом тотожних перетворень за допомогою лише 1-7.

1-7 – це система аксіом булевої алгебри.

Система аксіом 1-7 не єдина. Існує **двоїста** до неї система аксіом $1' - 7'$.

$1'$. $\bar{\bar{A}} = A$ (закон подвійного заперечення)

$2'$. $A \cap A = A$

$3'$. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (асоціативність)

$4'$. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивність)

$5'$. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (закон де Моргана)

$6'$. $A \cap B = B \cap A$ (комутативність)

$7'$. $A \cap (B \cup \bar{B}) = A$

Бінарні відношення

Означення. Бінарним відношенням на парі множин А та В називається довільна підмножина декартового добутку $A \times B$.

α – бінарне відношення (**б.в.**) $\alpha \subseteq A \times B$

Якщо бінарне відношення задано на парі множин А та А, то кажуть, що **б.в. задано на множині А**.

$\alpha \subseteq A \times A, \quad \alpha \subseteq A^2$

Той факт, що елементи a та b знаходяться у відношенні α, записують так: $a\,\alpha\,b$ або $(a,b) \in \alpha$.

Приклад. Нехай $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,6\}$, $\alpha \subseteq A \times B$, α – бінарне відношення «<» («менше»).

Тоді, наприклад, $(1,2) \in \alpha$, $(3,2) \notin \alpha$. Подамо б.в. α списком:

$$\alpha = \{(1,2),(1,4),(1,6),(2,4),(2,6),(3,4),(3,6)\}.$$

Бінарні відношення зручно подавати за допомогою **графів**. При цьому елементи множин зображуються точками на площині, а той факт, що елементи a та b знаходяться у відношенні α, зображується дугою зі стрілкою, яка починається у точці a та закінчується у точці b (рис.9).

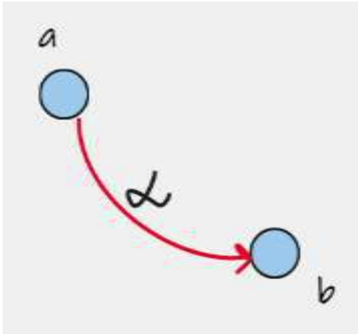


Рисунок 9 – Елементи a та b знаходяться у відношенні α

Приклад. $A = \{2,4,8\}$, $B = \{1,5,9\}$, $\alpha \subseteq A \times B$, α – «>» («більше»).

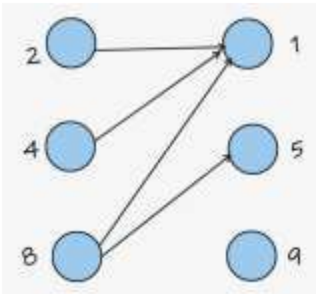


Рисунок 10 – Граф бінарного відношення α

Бінарні відношення також можна задавати за допомогою таблиць (матриць). Матриця складається з нулів та одиниць. Нехай стовпці – це перші координати, а рядки – другі. На перетині i - го стовпця й j - го рядка буде 1, якщо $x_i \,\alpha\, y_j$, і буде 0, якщо $(x_i, y_j) \notin \alpha$. На рис.11 наведено таблицю (матрицю), яка задає деяке б.в. $\alpha \subseteq X \times Y$.

Означення. **Відношенням арності** n (n- арним відношенням) на множинах $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називають довільну підмножину декартового добутку цих множин $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
y_1	1	1	0	1	1
y_2	0	0	0	1	0
y_3	1	0	1	0	1
y_4	1	1	1	0	0

Рисунок 11 – Матриця бінарного відношення α

Розглянемо булеан $\text{ß}\left(A\times B\right)=\ 2^{A\times B}$. Елементи такого булеана – це бінарні відношення на парі множин А та В. Елементи – це підмножини, тому з ними, як з множинами, можна проводити операції.

1) **Операція об'єднання бінарних відношень**

Нехай $\alpha\subseteq A\times B,\ \beta\subseteq A\times B$. Тоді $\left(\alpha\cup\beta\right)\subseteq A\times B$. Для $a\in A,\ b\in B$ маємо

$$a\left(\alpha\cup\beta\right)b\ \Leftrightarrow\ a\,\alpha\,b\ \text{ або }\ a\,\beta\,b.$$

Приклади. А та В – числові множини. Нехай α – “<”, β – “>”. Тоді $\left(\alpha\cup\beta\right)$ – “$\neq$”. Нехай α – “<”, β – “=”. Тоді $\left(\alpha\cup\beta\right)$ – “≤”. Нехай α – “<”, β – “≥ ”. Тоді $\left(\alpha\cup\beta\right)\ =\ A\times B$.

2) **Операція перетину бінарних відношень**

Нехай $\alpha\subseteq A\times B,\ \beta\subseteq A\times B$. Тоді $\left(\alpha\cap\beta\right)\subseteq A\times B$. Для $a\in A,\ b\in B$ маємо

$$a\left(\alpha\cap\beta\right)b\ \Leftrightarrow\ a\,\alpha\,b\ \text{ і }\ a\,\beta\,b.$$

Приклади. А та В – числові множини. Нехай α –“<”, β – “>”. Тоді $\left(\alpha\cap\beta\right)=\varnothing$. Нехай α –“≥ ”, β – “≤ ”. Тоді $\left(\alpha\cap\beta\right)$ – “=”.

3) **Операція обернення бінарного відношення**

Нехай $\alpha\subseteq A\times B$. Тоді $\alpha^{-1}\subseteq B\times A$. Для $a\in A,\ b\in B$ маємо

$$b\,\alpha^{-1}\,a\ \ \Leftrightarrow\ \ a\,\alpha\,b.$$

Приклад. А та В – числові множини. Нехай α –“<”. Тоді α^{-1}– “>”. Дійсно, якщо $a<b$, то $b>a$.

4) **Операція доповнення бінарного відношення**

Нехай $\alpha\subseteq A\times B$. Тоді $\overline{\alpha}\subseteq A\times B$. Для $a\in A,\ b\in B$ маємо

$$a\,\overline{\alpha}\,b\ \ \Leftrightarrow\ \ \left(a,b\right)\notin\alpha.$$

Приклад.

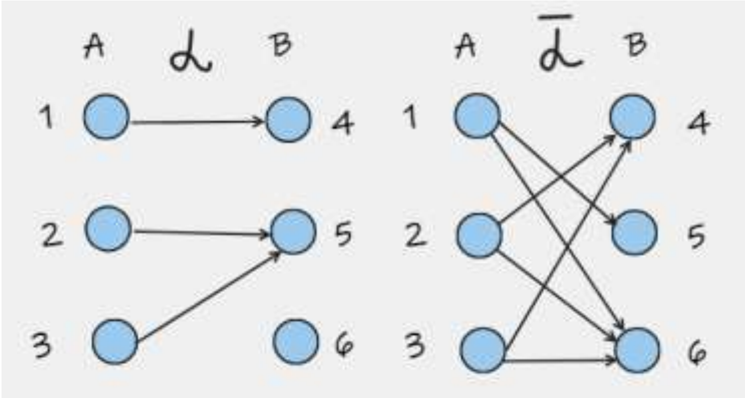


Рисунок 12 – Графи бінарних відношень α та $\bar{\alpha}$

5) **Добуток бінарних відношень**

Нехай $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq B \times C$. Тоді $\alpha \circ \beta \subseteq A \times C$. Для $a \in A$, $c \in C$ маємо

$$a(\alpha \circ \beta)c \Leftrightarrow \exists b \in B:\ a\,\alpha\,b \text{ і } b\,\beta\,c.$$

Приклад. Бінарні відношення $\alpha \subseteq A \times B$ та $\beta \subseteq B \times C$ подані графами на рис.13. Знаходимо добуток бінарних відношень $\alpha \circ \beta$.

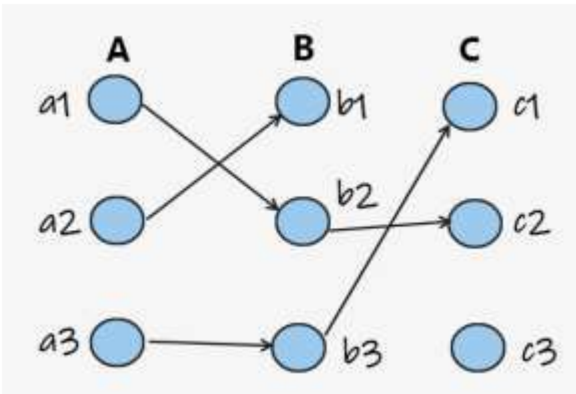


Рисунок 13 – Граф добутку бінарних відношень α та β

Елементи $a \in A$ та $c \in C$ знаходяться у відношенні $\alpha \circ \beta$ тоді й тільки тоді, коли у графічному зображенні існує шлях з точки a у точку c. Так, у нашому прикладі існує шлях з точки a_1 у точку c_2 та шлях з точки a_3 у точку c_1. Отже, $\alpha \circ \beta = \{(a_1, c_2), (a_3, c_1)\}$.

ЛЕКЦІЯ 3

ТЕМА: Властивості бінарних відношень на множині А

План лекції

Алгебра бінарних відношень на множині А. Діагональне бінарне відношення. Рефлексивне бінарне відношення. Транзитивне бінарне відношення. Симетричне бінарне відношення. Антисиметричне бінарне відношення. Відношення еквівалентності. Відношення порядку. Антирефлексивність. Відношення строгого порядку. Діаграма Хассе.

Список термінів

1. **Діагональність б.в.**
2. **Рефлексивність б.в.**
3. **Транзитивність б.в.**
4. **Симетричність б.в.**
5. **Антисиметричність б.в.**
6. **Б.в. еквівалентності**
7. **Б.в. порядку**
8. **Упорядкована множина**
9. **Діаграма Хассе**
10. **Порівнянні елементи**
11. **Лінійно упорядкована множина**

Властивості бінарних відношень на множині А

Алгеброю бінарних відношень на множині А називається множина всіх можливих бінарних відношень на множині А разом з операціями об'єднання, перетин, доповнення, обернення, добуток.

$$\left(2^{A\times A}, \cup, \cap, {}^{-}, {}^{-1}, \circ\right)$$ – алгебра б.в. на множині А.

Булеан множини $A\times A = A^2$ є замкненим відносно операцій об'єднання, перетин, доповнення, обернення, добуток.

Властивості бінарних відношень на A

1) Б.в. на множині А називається **діагональним**, якщо воно складається з усіх можливих пар однакових елементів.

$$\alpha = \{(a,a) : a \in A\}.$$

У графічному зображенні діагонального б.в. присутні лише петлі, немає інших дуг.

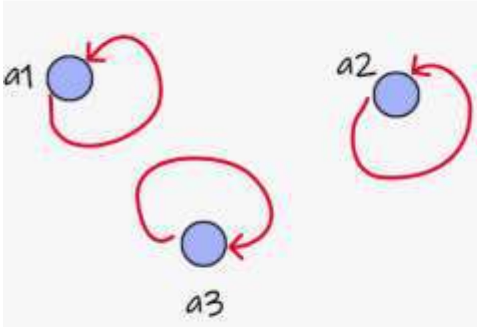


Рисунок 14 – Граф діагонального бінарного відношення

Матриця такого відношення є діагональною, тобто на головній її діагоналі одиниці, всі інші елементи – нулі:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Б.в. називається **рефлексивним**, якщо кожний елемент множини А знаходиться у відношенні сам з собою. У графічному зображенні окрім петель можливі інші дуги.

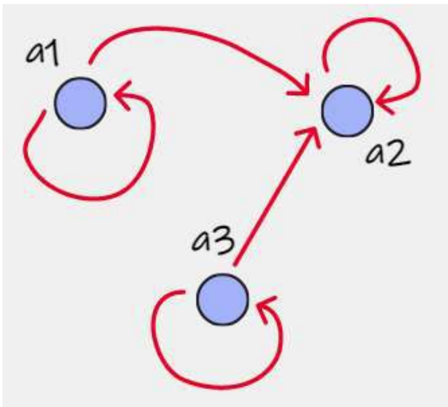


Рисунок 15 – Граф рефлексивного бінарного відношення

Матриця такого відношення має на головній діагоналі одиниці, а серед інших елементів зустрічається хоча б одна одиниця:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Б.в. α називається **транзитивним**, якщо для $a,b,c \in A$ виконується

$$a\alpha b, b\alpha c \Rightarrow a\alpha c.$$

Графічно це означає: якщо є дуга з a в b, є дуга з b в c, то є дуга з a в c.

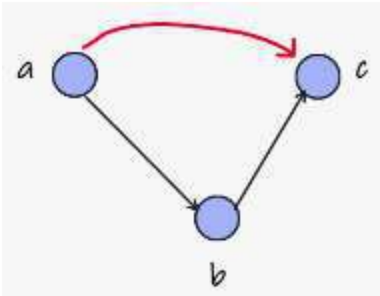


Рисунок 16 – Граф транзитивного бінарного відношення

4) Б.в. α на множині А називається **симетричним**, якщо

$$a\alpha b \Rightarrow b\alpha a.$$

Графічно це означає: якщо є дуга з a в b, то є дуга з b в a.

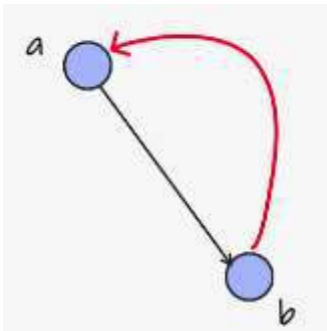


Рисунок 17 – Граф симетричного бінарного відношення

5) Б.в. α на множині А називається **антисиметричним**, якщо з того, що $a\alpha b$ і $b\alpha a$ випливає, що $a = b$. У графічному зображенні не може бути протилежно орієнтованих дуг.

6) Б.в. на множині А називається **відношенням еквівалентності**, якщо воно одночасно є рефлексивним, симетричним і транзитивним.

Відношення еквівалентності будемо позначати σ (сигма).

1. $a\sigma a$, $\forall a \in A$ (рефлексивність)
2. $a\sigma b \Leftrightarrow b\sigma a$ (симетричність)
3. $a\sigma b, b\sigma c \Rightarrow a\sigma c$ (транзитивність)

Приклад. Нехай $B,C \in 2^A$, $B\sigma C \Leftrightarrow |B| = |C|$, $\sigma \subseteq 2^A \times 2^A$, σ – «рівність за числом елементів». Нехай $A = \{a_1, a_2, a_3\}$. Тоді $2^A = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_2, a_3\}, A, \varnothing\}$. Позначимо елементи булеана $b_i, i = 1,2,...,8$, де $b_1 = \{a_1\}$, $b_2 = \{a_2\}$, $b_3 = \{a_3\}$, $b_4 = \{a_1, a_2\}$, $b_5 = \{a_1, a_3\}$, $b_6 = \{a_2, a_3\}$, $b_7 = A$, $b_8 = \varnothing$. Подамо бінарне відношення графом (рис.18).

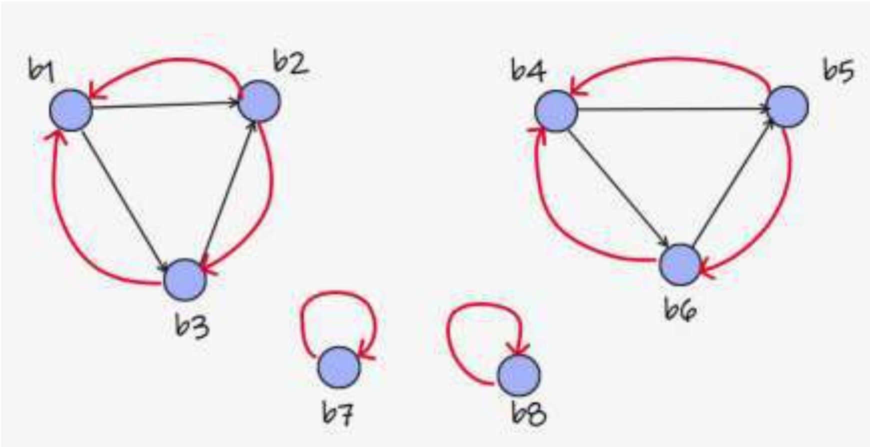


Рисунок 18 – Граф відношення еквівалентності

Це відношення є рефлексивним, симетричним, транзитивним. Отже, це приклад відношення еквівалентності.

Відношення рівності на множині дійсних чисел є відношенням еквівалентності.

Відношення подібності трикутників на множині всіх трикутників є відношенням еквівалентності.

Відношення «$\leq$» на множині дійсних чисел не є відношенням еквівалентності.

7) Б.в. на множині A називають **відношенням порядку** (позначають ρ (ро)), якщо воно одночасно рефлексивне, антисиметричне, транзитивне.

1. $a\rho a$, $\forall a \in A$ (рефлексивність)
2. $a\rho b$, $b\rho a \Rightarrow a = b$ (антисиметричність)
3. $a\rho b, b\rho c \Rightarrow a\rho c$ (транзитивність)

Приклад. Відношення «$\leq$» на множині дійсних чисел є відношенням порядку.

Якщо в означенні відношення порядку рефлексивність замінити на антирефлексивність

$$a\bar{\rho}a\,,\ \forall a\in A,$$

то порядок буде строгим, бінарне відношення буде відношенням строгого порядку.

Множину A з заданим на ній відношенням порядку ρ називають **упорядкованою** множиною.

Приклади. 1) $(R,\le)$ – упорядкована множина. $\forall a,b\in R$ або $a\le b$, або $b\le a$. Упорядкованість повна.

2) $(2^A,\subseteq)$ – упорядкована множина. Упорядкованість не є повною. Наприклад, $A=\{a,b,c\}$. $\{a\}\in 2^A$, $\{c\}\in 2^A$, при цьому $\{a\}\not\subset\{c\}$ і $\{c\}\not\subset\{a\}$.

3) Нехай $A=\{a,b,c\}$, множина C містить такі елементи булеана 2^A :

$$C=\{\varnothing,\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}.$$

$(C,\subseteq)$– упорядкована множина. Упорядкованість повна.

Для зображення скінченних упорядкованих множин застосовують **діаграми Хассе**. Ідея діаграми Хассе в тому, що ми не показуємо петлі та стрілки. Якщо в графі є стрілка (a,b), то на діаграмі Хассе точка a знаходиться нижче точки b.

Приклад. $A=\{1,2,3\}$, $(A,\le)$. На рис.19 подані граф та діаграма Хассе відношення $\le$.

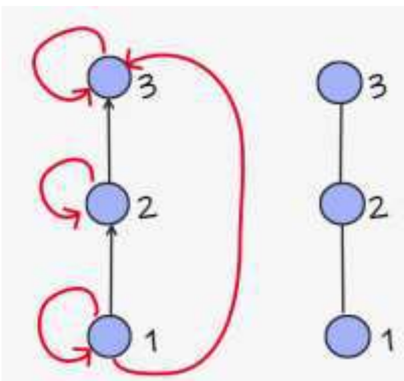


Рисунок 19 – Граф відношення порядку та діаграма Хассе

Приклад. $A=\{a,b,c\}$, $\left(2^A,\subseteq\right)$.

ß(A) = $\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},A\}$ На рис.20 подано діаграму Хассе відношення $\subseteq$.

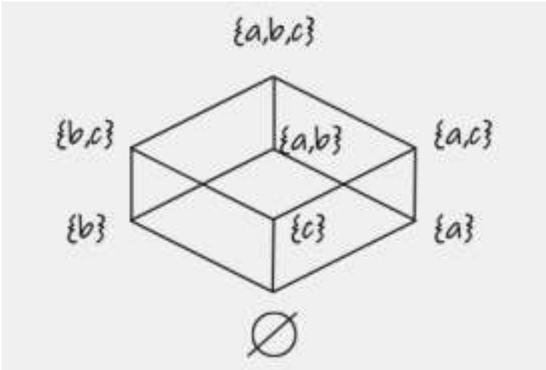


Рисунок 20 – Діаграма Хассе

Правило читання діаграми Хассе полягає в тому, що $x\rho y$, якщо з точки x можна потрапити у точку y, рухаючись висхідними відрізками.

Нехай (A,ρ). Два елементи $a,b\in A$ називаються **порівнянними**, якщо $a\rho b$ або $b\rho a$.

Приклад. $(\{1,5,2\},\leq)$ $1\leq 5,\quad 1\leq 2,\quad 2\leq 5$.

Приклад. $A=\{2,3,6,7,14\}$, ρ – «бути дільником». На рис.21 подані граф та діаграма Хассе відношення ρ.

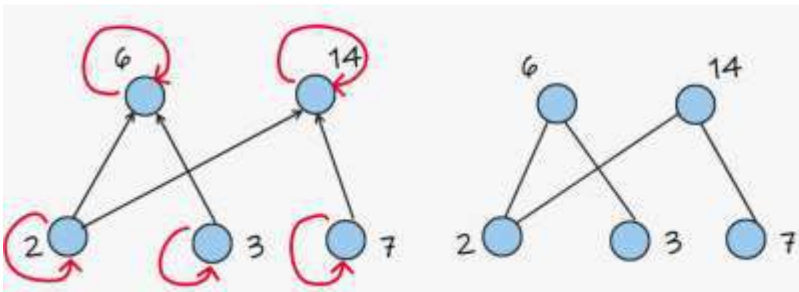


Рисунок 21 – Граф і діаграма Хассе відношення «бути дільником»

Тут, наприклад, 2 і 3 – непорівнянні, 7 і 14 – порівнянні.

Упорядкована множина, будь-які два елементи якої можна порівняти, називається **лінійно упорядкованою**.

Приклад. $\left(\left\{1,5,2\right\},\le\right)$ – лінійно упорядкована множина.

ЛЕКЦІЯ 4

ТЕМА: Відображення. Булеві функції

План лекції

Відображення. Образи та прообрази. Повний прообраз. Функція. Операція об'єднання відображень. Операція перетину відображень. Теорема про об'єднання та перетин відображень. Операція добутку відображень. Сюр'єктивне відображення (означення, граф, розв'язки рівняння). Ін'єктивне відображення (означення, граф, розв'язки рівняння). Бієктивне (взаємно однозначне) відображення (означення, граф, розв'язки рівняння).

Булеві функції. Таблиця істинності, її розміри. Число булевих функцій *n* змінних. Істотні та фіктивні змінні. Сусідні за змінною набори. Рівність булевих функцій. Процедура видалення фіктивної змінної. Процедура додавання фіктивної змінної.

Список термінів

1. **Відображення**
2. **Образ елемента**
3. **Прообраз елемента**
4. **Повний прообраз елемента**
5. **Функція**
6. **Об'єднання відображень**
7. **Перетин відображень**
8. **Доповнення відображення**
9. **Обернення відображення**
10. **Добуток відображень**
11. **Композиція (суперпозиція) відображень**
12. **Сюр'єктивне відображення**
13. **Ін'єктивне відображення**
14. **Бієктивне відображення**
15. **Скінченна функція**
16. **Булева функція**
17. **Таблиця істинності**
18. **Суттєва змінна**
19. **Істотна змінна**

20. Фіктивна змінна

21. Сусідні за змінною набори

Відображення

Означення. Бінарне відношення на парі множин A та B називається **відображенням** тоді й тільки тоді, коли кожний елемент множини A знаходиться у цьому відношенні з єдиним елементом із множини B.

Якщо б.в. $\alpha \subseteq A \times B$ є відображенням, то пишуть $\alpha : A \to B$.

У графічному зображенні відображення з кожного елемента a множини A виходить точно одна дуга (рис.22).

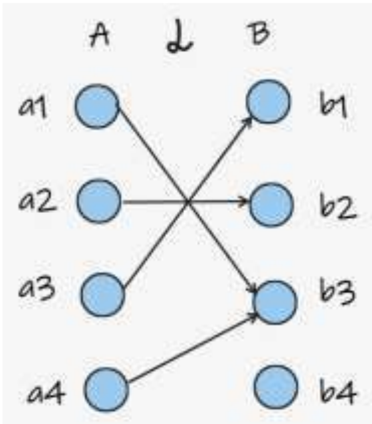


Рисунок 22 – Граф відображення α

Нехай $(a,b) \in \alpha$. Тоді для відображення пишуть $\alpha(a) = b$.

b – **образ** елемента a, a – **прообраз** елемента b.

Для відображення, поданого вище графічно, маємо

$$\alpha(a_1) = b_3,\ \alpha(a_2) = b_2,\ \alpha(a_3) = b_1, \alpha(a_4) = b_3.$$

Це образи елементів множини A. Прообрази елементів множини B:

$$\alpha^{-1}(b_1) = a_3,\ \alpha^{-1}(b_2) = a_2,\ \alpha^{-1}(b_3) = \{a_1, a_4\}, \alpha^{-1}(b_4) = \varnothing.$$

Елементи a_1 та a_4 є прообразами елемента b_3, множина $\{a_1, a_4\}$ є **повним прообразом** елемента b_3.

Якщо $\alpha : A \to B$ і при цьому A та B мають числову природу, то відображення α називається **функцією**. Тоді A – підмножина області визначення функції.

Відображення можна задавати графічно, аналітично, таблично.

Над відображеннями, як над бінарними відношеннями, можна проводити операції об’єднання, перетину, доповнення, обернення, добутку. Результатом буде бінарне відношення, яке, взагалі кажучи, не є відображенням.

Приклад. Нехай відображення $\alpha : A \to B$ та $\beta : A \to B$ подані графічно (рис.23).

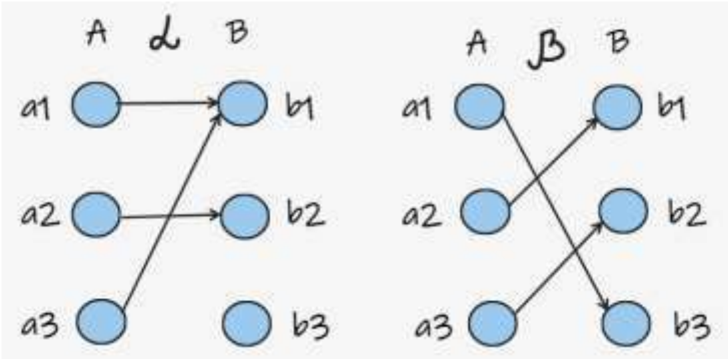


Рисунок 23 – Графи відображень α та β

Виконаємо операцію об'єднання відображень α та β. Результат виконання операції подано графом на рис.24.

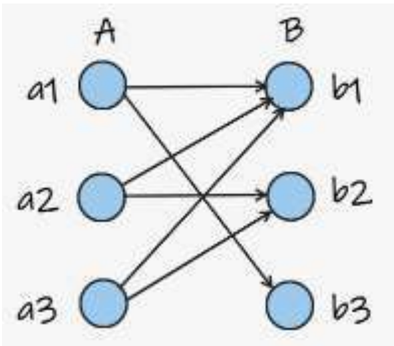


Рисунок 24 – Граф відображення $\alpha \cup \beta$

У цьому прикладі $\alpha \cup \beta$ – це не відображення, це бінарне відношення. Такі ж приклади можна навести для операцій перетин, доповнення, обернення.

Теорема. Об'єднання (перетин) двох відображень множини A в множину B є відображенням тоді й тільки тоді, коли відображення збігаються одне з одним.

Нехай $\alpha : A \to B$, $\beta : B \to C$ (відображення), $\alpha(a) = b, \beta(b) = c$. Два елементи a і c знаходяться у бінарному відношенні $\alpha \circ \beta$ тоді й тільки тоді, коли $c = \beta(\alpha(a))$. При цьому кожний елемент множини А знаходиться у відношенні $\alpha \circ \beta$ з єдиним елементом множини С. Добуток відображень – це завжди відображення. Добуток відображень називають **композицією** або **суперпозицією**.

Приклад. $\alpha : X \to Y$, $\alpha(x) = sin\,x$, $\beta : Y \to Z$, $\beta(y) = 2^y$, $\alpha \circ \beta : X \to Z$, $(\alpha \circ \beta)(x) = 2^{sin\,x}$.

Серед відображень виділяють три основних види:

1) сюр’єктивне (сюр’єкція),
2) ін’єктивне (ін’єкція),
3) бієктивне (бієкція).

1) Відображення $\alpha : A \to B$ називається **сюр’єктивним**, якщо кожний елемент b множини В має прообраз.

У графічному зображенні кожний елемент множини В має щонайменше одну вхідну дугу (рис.25).

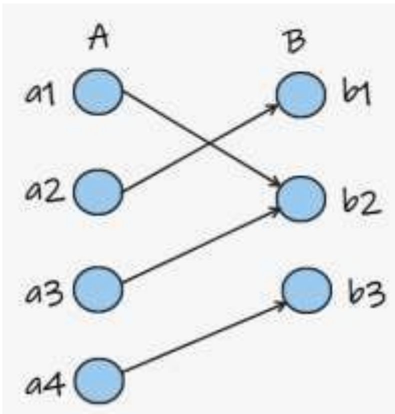


Рисунок 25 – Граф сюр’єктивного відображення

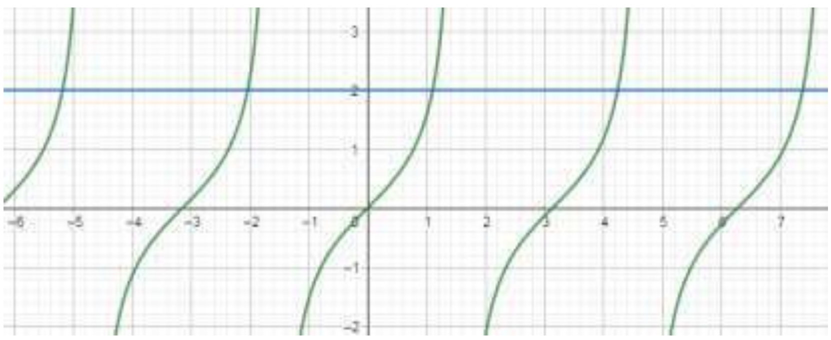


Рисунок 26 – Графік сюр’єктивного відображення $y = tg\,x$ та пряма $b = 2$

Для кожного елемента $b \in B$ рівняння $\alpha(x) = b$ має хоча б один розв'язок. Графік такої функції $\alpha(x)$ подано на рис.26. Так, наприклад, для $b = 2$ рівняння $\alpha(x) = 2$ має «хоча б один розв'язок».

2) Відображення $\alpha : A \to B$ називається **ін'єктивним**, якщо різні елементи відображаються по-різному: $a' \neq a'' \Rightarrow \alpha(a') \neq \alpha(a'')$.

У графічному зображенні кожний елемент множини В має не більше однієї вхідної дуги (рис.27).

Для кожного елемента $b \in B$ рівняння $\alpha(x) = b$ має не більше одного розв'язку. Графік такої функції $\alpha(x)$ подано на рис.28. Так, наприклад, для $b = 2$ рівняння $\alpha(x) = 2$ має один розв'язок, для $b = 0$ – жодного.

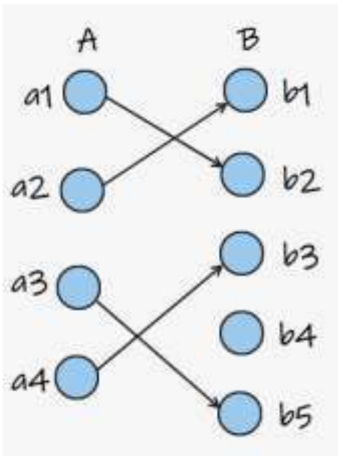


Рисунок 27 – Граф ін'єктивного відображення

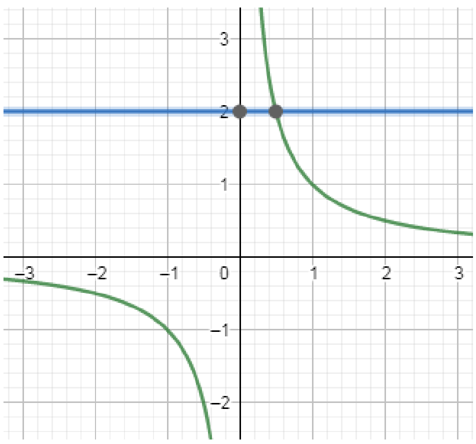


Рисунок 28 – Графік ін'єктивного відображення $y = \dfrac{1}{x}$ та пряма $b = 2$

3) Відображення $\alpha : A \to B$ називається **бієктивним** (**взаємно однозначним**), якщо кожний елемент b множини В має точно один прообраз.

У графічному зображенні кожний елемент множини В має точно одну вхідну дугу (рис.29).

Для кожного елемента $b \in B$ рівняння $\alpha(x) = b$ має точно один розв'язок. Графік такої функції $\alpha(x)$ подано на рис.30. Так, наприклад, для $b = 2$ рівняння $\alpha(x) = 2$ має точно один розв'язок.

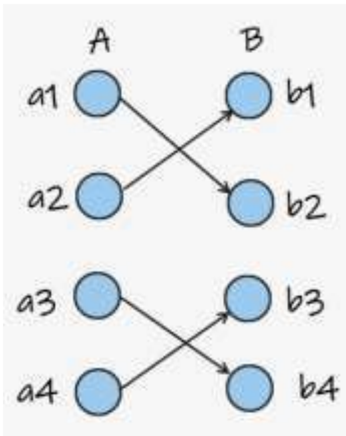


Рисунок 29 – Граф бієктивного відображення

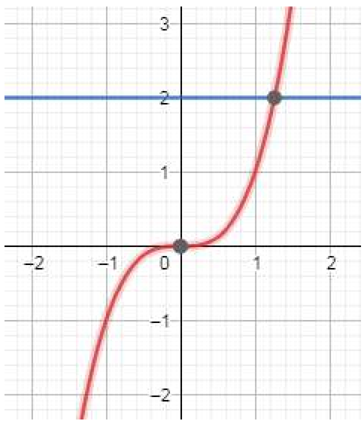


Рисунок 30 – Графік бієктивного відображення $y = x^3$ та пряма $b = 2$

Булеві функції

При практичному застосуванні дискретної математики важливу роль грають **скінченні функції**. Так називають функції, у яких як змінні, так і сама функція приймають значення з деякої скінченної множини. Зазвичай в ролі такої множини виступає підмножина цілих невід'ємних чисел $E_k = \{0,1,2,...,k-1\}$, k – кількість елементів. Зокрема $E_2 = \{0,1\}$, випадок поширений, найбільш вивчений.

Означення. Відображення $f : E_2^n \to E_2$ називається **булевою функцією** (функцією алгебри логіки) від n змінних.

Таку функцію можна задати таблично. У таблиці 2^n рядків та $n+1$ стовпчик. Кожний рядок є набором з «0» та «1» довжиною $n+1$. Перші n компонентів відповідають значенням змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, а остання компонента відповідає значенню функції $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ на цьому наборі. Цю таблицю називають **таблиця істинності**. Рядки таблиці відповідають всім можливим наборам $x_1, x_2, ..., x_n$. Ці набори упорядковують, як двійкові числа за порядком зростання і розташовують зверху вниз. Кожний наступний набір отримуємо з попереднього додаванням двійкової одиниці. Таблицю істинності булевої функції n змінних подано на рис.31.

x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, ..., x_n)$
0	0	$\ldots$	0	0	$f(0,0,...,0)$
0	0	$\ldots$	0	1	$f(0,0,...,0,1)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
1	0	$\ldots$	0	0	$f(1,0,...,0)$
1	0	$\ldots$	0	1	$f(1,0,...,0,1)$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
1	1	$\ldots$	1	0	$f(1,1,...,1,0)$
1	1	$\ldots$	1	1	$f(1,1,...,1)$

Рисунок 31 – Таблиця істинності булевої функції n змінних

Рядки таблиці істинності функції f упорядковані, тому дві різні функції від n змінних мають різні $(n+1)$-і стовпчики. Таким чином, кожна булева функція повністю задається стовпцем своїх значень. Довжина стовпця 2^n. Різних стовпців з «0» та «1» існує 2^{2^n}. Тому справедлива така теорема:

Теорема. Число булевих функцій від n змінних дорівнює 2^{2^n}.

Число булевих функцій від n змінних скінченно. Щоби встановити, чи мають ці функції деяку властивість, достатньо переглянути всі функції. Але 2^n та 2^{2^n} швидко зростають зі зростанням n ($n=1,\ 2^{2^n}=4$; $n=2,\ 2^{2^n}=16$; $n=3,\ 2^{2^n}=256;\ldots$). Так, 2^n при $n\geq 40$, 2^{2^n} при $n\geq 6$ дуже великі числа, перебрати всі функції практично неможливо. У зв'язку з цим виникла необхідність розглядати функції від меншого числа аргументів, як функції від більшого числа аргументів.

Означення. Змінна x_i називається **суттєвою** (**істотною**) для булевої функції $f\left(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n\right)$, якщо існують два набори $\alpha=\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_n\right)$ і $\beta=\left(\beta_1,\ldots,\beta_i,\ldots,\beta_n\right)$, які

1) відрізняються лише i - ою змінною, $\alpha_i\neq\beta_i$,

2) значення функції на цих наборах різні.

У противному випадку змінна x_i називається **несуттєвою** або **фіктивною**.

Два набори, які відрізняються лише однією координатою називаються **сусідніми** за цією координатою.

Булеві функції розглядаються з точністю до фіктивних змінних. Дві булеві функції називаються **рівними**, якщо можна отримати одну з другої шляхом додавання або видалення фіктивних змінних.

Як розпізнати фіктивні змінні? Треба перебрати всі можливі пари сусідніх за змінною наборів та порівняти значення функції на цих наборах. Для видалення фіктивної змінної викреслюємо стовпчик у таблиці істинності, з кожної пари сусідніх за цією змінною наборів залишаємо один набір.

Приклад. Нехай булева функція трьох змінних задана таблицею істинності (рис.32). На наборах, що є сусідніми за змінною x_3, функція приймає однакові значення: $f\left(0{,}0{,}0\right)=f\left(0{,}0{,}1\right)$, $f\left(0{,}1{,}0\right)=f\left(0{,}1{,}1\right)$, $f\left(1{,}0{,}0\right)=f\left(1{,}0{,}1\right)$, $f\left(1{,}1{,}0\right)=f\left(1{,}1{,}1\right)$. Звідси робимо висновок, що x_3 – фіктивна змінна, вона не впливає на значення функції, задана функція є функцією двох змінних: $f\left(x_1,x_2\right)$. Із таблиці (рис.32) викреслюємо стовпчик x_3 та чотири рядки (перший, третій, п'ятий, сьомий). Таблиця набуває нового вигляду (рис.33).

Змінна x_1 є істотною. Дійсно, $f\left(0{,}0\right)\neq f\left(1{,}0\right)$. Змінна x_2 також є істотною. Дійсно, $f\left(0{,}0\right)\neq f\left(0{,}1\right)$.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Рисунок 32 – Таблиця істинності булевої функції $f(x_1, x_2, x_3)$

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Рисунок 33 – Таблиця істинності без фіктивної змінної

У прикладі видалена фіктивна змінна. Процедура додавання фіктивної змінної виконується у зворотному порядку.

ЛЕКЦІЯ 5

ТЕМА: Елементарні булеві функції. Реалізація булевих функцій формулами. Двоїсті функції

План лекції

Число булевих функцій однієї змінної. Булеві функції однієї змінної: нуль, одиниця, тотожність, заперечення. Число булевих функцій двох змінних. Булеві функції двох змінних: кон'юнкція, диз'юнкція, додавання за модулем двійка, імплікація, еквіваленція, штрих Шеффера, стрілка Пірса. Інші булеві функції двох змінних.

Означення формули над множиною булевих функцій. Процедура побудови формули. Реалізація булевої функції формулою, неєдиність реалізації. Відповідність між множиною булевих функцій та

множиною формул. Суперпозиція булевих функцій. Елементарна суперпозиція. Підформула формули. Еквівалентні формули. Принцип еквівалентності.

Двоїста функція. Самодвоїста функція. Самодвоїстість функцій тотожність та заперечення. Знаходження двоїстої функції за допомогою таблиці істинності. Функції двоїсті до 0 та 1. Функція двоїста до кон'юнкції. Функція двоїста до диз'юнкції.

Список термінів

1. Булева функція
2. Функція нуль
3. Функція одиниця
4. Функція тотожність
5. Функція заперечення
6. Кон'юнкція
7. Диз'юнкція
8. Додавання за модулем двійка
9. Виключне або
10. Імплікація
11. Еквіваленція
12. Штрих Шеффера
13. Стрілка Пірса
14. Множина P_2
15. Реалізація булевої функції
16. Суперпозиція булевих функцій
17. Елементарна суперпозиція
18. Підформула
19. Еквівалентні формули
20. Двоїста функція
21. Самодвоїста функція
22. Інвертування стовпця значень

Елементарні булеві функції

1) **Булеві функції однієї змінної**.

Нехай $n=1$. Число булевих функцій однієї змінної $2^{2^n}=2^{2^1}=2^2=4$. Це функції

– **нуль,** $f(x)=0$,

– **одиниця**, $f(x)=1$,
– **тотожність**, $f(x)=x$,
– **заперечення**, $f(x)=\overline{x}$.

Таблиця істинності для цих функцій містить $n+1=2$ стовпчики та $2^n=2$ рядки. На рис.34 в одну таблицю зведені таблиці істинності всіх чотирьох функцій.

x	0	1	x	$\overline{x}$
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Рисунок 34 – Таблиці істинності функцій 0, 1, x, $\overline{x}$

2) **Булеві функції двох змінних**.

Нехай $n=2$. Число булевих функцій двох змінних $2^{2^n}=2^{2^2}=2^4=16$. Це зокрема такі функції:

– **нуль**, $f(x_1,x_2)=0$,
– **одиниця**, $f(x_1,x_2)=1$,
– **кон'юнкція** (логічне множення), $f(x_1,x_2)=x_1\,\&\,x_2=x_1\wedge x_2=x_1\cdot x_2$,
  $f(0,0)=0\cdot 0=0$, $f(0,1)=0\cdot 1=0$, $f(1,0)=1\cdot 0=0$, $f(1,1)=1\cdot 1=1$.
  Функція має значення 1 в одному випадку, коли $x_1=x_2=1$, для всіх інших значень аргументів функція дорівнює нулю.
– **Диз'юнкція**, $f(x_1,x_2)=x_1\vee x_2=x_1+x_2$. Ця функція приймає значення нуль в єдиному випадку, коли обидва аргументи дорівнюють нулю; у всіх інших випадках функція дорівнює 1.
– **Додавання за модулем двійка (виключне або)**, $f(x_1,x_2)=x_1\oplus x_2$.
  $f(0,0)=0\oplus 0=0$, $f(0,1)=0\oplus 1=1$, $f(1,0)=1\oplus 0=1$, $f(1,1)=1\oplus 1=0$.
– **Імплікація**, $f(x_1,x_2)=x_1\rightarrow x_2$. Ця функція дорівнює нулю лише на наборі (1,0): $f(1,0)=1\rightarrow 0=0$.
– **Еквіваленція** (еквівалентність), $f(x_1,x_2)=x_1\equiv x_2=x_1\Leftrightarrow x_2$. Ця функція приймає значення 1, якщо аргументи мають однакові значення та приймає значення 0, якщо аргументи мають різні

значення. $f(0,0)=0\equiv 0=1$, $f(0,1)=0\equiv 1=0$, $f(1,0)=1\equiv 0=0$, $f(1,1)=1\equiv 1=1$.

- **Штрих Шеффера**, $f(x_1,x_2)=x_1|x_2$. Штрих Шеффера – це заперечення кон’юнкції. Вектор, що задає кон’юнкцію – це вектор (0001). Вектор, що задає штрих Шеффера – це вектор (1110).
- **Стрілка Пірса**, $f(x_1,x_2)=x_1\downarrow x_2$. Стрілка Пірса – це заперечення диз’юнкції. Вектор, що задає диз’юнкцію – це вектор (0111). Вектор, що задає стрілку Пірса – це вектор (1000).

Таблиця істинності для цих функцій містить $n+1=3$ стовпчики та $2^n=4$ рядки. На рис.35 в одну таблицю зведені таблиці істинності всіх наведених вище функцій.

x_1	x_2	0	1	&	$\vee$	$\oplus$	$\rightarrow$	$\Leftrightarrow$	$\vert$	$\downarrow$
0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	0

Рисунок 35 – Таблиці істинності функцій двох змінних

Ми описали 9 булевих функцій, залишається ще 7. Що це за 7 функцій? Це ті вектори - «четвірки», яких немає у стовпчиках №№ 3- 11 на рис.35. 1) Це вектор (0011), $f(x_1,x_2)=x_1$ – функція однієї змінної, змінна x_2– фіктивна. 2) Це вектор (0101), $f(x_1,x_2)=x_2$ – функція однієї змінної, змінна x_1– фіктивна. 3) Це вектор (1100), $f(x_1,x_2)=\overline{x}_1$ – функція однієї змінної, змінна x_2– фіктивна. 4) Це вектор (1010), $f(x_1,x_2)=\overline{x}_2$ – функція однієї змінної, змінна x_1– фіктивна. 5) Це вектор (0010), $f(x_1,x_2)=\overline{x_1\rightarrow x_2}$ – заперечення імплікації. 6), 7) – це вектори (1011) та (0100).

Реалізація булевих функцій формулами

Булеві функції можна задавати таблично, але є ще один спосіб, і він зручний, це задання за допомогою формул.

Аналогічно формулам шкільної алгебри булеві формули будуються, виходячи з деякого запасу простих, елементарних формул.

Нехай P_2 – множина всіх булевих функцій. Нехай $D \subseteq P_2$.

Означення. 1. Для будь-якої булевої функції $f \in D$ запис $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ є **формулою** над D. 2. Нехай $f_0 \in D$, A_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ – або формула над D, що містить змінні $x_1, x_2, ..., x_n$, або одна з цих змінних. Тоді результат підстановки $A_1, A_2, ..., A_n$ замість змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ у формулу $f_0(x_1, x_2, ..., x_n)$ є **формулою** над D.

Приклад. Нехай $D = \left\{\&, \vee, \bar{\ }, \to\right\}$ – множина булевих функцій. Нехай

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \,\&\, \bar{x}_2) \vee \left(\overline{x_1 \to x_3}\right) \text{ – формула над } D.$$

Опишемо процедуру побудови цієї формули.

1. У множині D обираємо кон'юнкцію. Її запис за означенням є формулою. Замість першого аргументу підставляємо тотожну функцію x_1, замість другого – заперечення $\bar{x}_2$. Результатом буде формула $U_1 = x_1 \,\&\, \bar{x}_2$.

2. У множині D обираємо заперечення і замість аргументу підставляємо імплікацію. Результатом буде формула $U_2 = \overline{x_1 \to x_3}$.

3. У множині D обираємо диз'юнкцію. Замість першого аргументу підставляємо U_1, замість другого – U_2. Результатом буде формула

$$U = U_1 \vee U_2 = (x_1 \,\&\, \bar{x}_2) \vee \left(\overline{x_1 \to x_3}\right).$$

Кажуть, що формула U **реалізує булеву функцію** f, U – це **реалізація булевої функції** f. Кажуть, що булева функція f реалізується формулою U (над множиною функцій D). Функція реалізується, взагалі кажучи, не лише формулою U. Відповідність між множиною формул та множиною булевих функцій не є взаємно однозначною.

Якщо деяка булева функція f реалізується над множиною функцій D, то функцію f називають **суперпозицією** функцій множини D. Функція f з прикладу є суперпозицією функцій $\&, \vee, \bar{\ }, \to$.

Нехай $f_0 = f_0(x_1, x_2, ..., x_k)$,

$$f_1 = f_1\left(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1i_1}\right),$$

$$f_2 = f_2\left(x_{21}, x_{22}, ..., x_{2i_2}\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_k = f_k\left(x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{ki_k}\right)$$

(x_{st} – тут s – номер функції в системі, t – номер змінної). Якщо у вираз для функції f_0 замість її аргументів $x_1, x_2, ..., x_k$ підставити відповідно $f_1, f_2, ..., f_k$, то отримаємо **елементарну суперпозицію** функцій $f_0, f_1, f_2, ..., f_k$:

$$\Phi\left(y_1, y_2, ..., y_l\right) = f_0\left(f_1\left(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1i_1}\right),\ f_2\left(x_{21}, x_{22}, ..., x_{2i_2}\right), \ldots, f_k\left(x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{ki_k}\right)\right).$$

Тут $\left\{y_1, y_2, ..., y_l\right\} = \left\{x_{11}, x_{12}, ..., x_{1i_1}, x_{21}, x_{22}, ..., x_{2i_2}, ..., x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{ki_k}\right\}$.

Формула, яку використовують при побудові формули U, називається її **підформулою**.

Дві формули U та W називаються **еквівалентними** ($U = W$), якщо вони реалізують рівні функції.

Принцип еквівалентності. Якщо у формулі U деяку підформулу замінити на еквівалентну формулу, то отримаємо формулу W еквівалентну формулі U.

Принцип еквівалентності дозволяє тотожно перетворювати формули.

Властивості елементарних булевих функцій

1) $x_1 \& x_2 = x_2 \& x_1$
2) $x_1 \& \left(x_2 \& x_3\right) = \left(x_1 \& x_2\right) \& x_3$
3) $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$
4) $x_1 \vee \left(x_2 \vee x_3\right) = \left(x_1 \vee x_2\right) \vee x_3$
5) $x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$
6) $x_1 \oplus \left(x_2 \oplus x_3\right) = \left(x_1 \oplus x_2\right) \oplus x_3$
7) $x_1 \& \left(x_2 \vee x_3\right) = \left(x_1 \& x_2\right) \vee \left(x_1 \& x_3\right)$
8) $x_1 \vee \left(x_2 \& x_3\right) = \left(x_1 \vee x_2\right) \& \left(x_1 \vee x_3\right)$
9) $\overline{\overline{x}} = x$
10) $x \vee x = x$
11) $x \cdot x = x$
12) $x \vee \overline{x} = 1$
13) $x \cdot \overline{x} = 0$
14) $\overline{x \& y} = \overline{x} \vee \overline{y}$
15) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \& \overline{y}$

Властивості 1) – 15) застосовують при тотожних перетвореннях.

Двоїсті функції

Нехай $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ – булева функція.

Означення. Функція $f^*\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\overline{f}\left(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n\right)$ називається **двоїстою функцією** до функції $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$.

Функції, які збігаються зі своїми двоїстими називаються **самодвоїстими**.

Приклад. x – функція тотожність, $\overline{x}$ – функція заперечення.

$$x^*=\overline{\overline{x}}=x,$$

$$\overline{x}^*=\overline{\overline{\overline{x}}}=\overline{x}.$$

Це самодвоїсті функції.

Нехай функція f задана таблицею істинності. Таблиця істинності функції f^* будується так. Значення функції змінюються на протилежні (інвертуються), стовпець інвертованих значень перевертається.

Приклад. Знайдемо функції двоїсті до функцій 0 та 1. Вектори, що задають ці функції, записані у таблицю на рис.36.

x	0	0^*	1	1^*
0	0	1	1	0
1	0	1	1	0

Рисунок 36 – Таблиці істинності функцій 0, 0^*, 1, 1^*

Бачимо, що $0^*=1$, $1^*=0$. Отже, функція двоїста до нуля – це одиниця, а функція двоїста до одиниці – це нуль.

Приклад. Знайдемо функції двоїсті до функцій $\&$ та $\vee$. Вектори, що задають ці функції записані у таблицю на рис.37.

x_1	x_2	$\&$	$\&^*$	$\vee$	$\vee^*$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Рисунок 37 – Таблиці істинності функцій $\&$, $\&^*$, $\vee$, $\vee^*$

Бачимо, що $\&^* = \vee$, $\vee^* = \&$. Отже, функція двоїста до кон'юнкції – це диз'юнкція, а функція двоїста до диз'юнкції – це кон'юнкція.

З означення двоїстої функції випливає, що функція двоїста до двоїстої – це сама функція: $\left(f^*\right)^* = f$.

ЛЕКЦІЯ 6

ТЕМА: Теорема двоїстості. Розкладання булевих функцій за змінними. Досконалі кон'юнктивні нормальні форми (ДКНФ). Повнота систем булевих функцій

План лекції

Теорема двоїстості. Принцип двоїстості. Наслідок принципу двоїстості.

Позначення x^σ. Елементарна кон'юнкція. Елементарна диз'юнкція. Теорема про розкладання булевої функції за змінними. Формула розкладання за першими k змінними. Формула розкладання за першою змінною. Формула розкладання за всіма n змінними. Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ). Теорема про систему функцій {&, V, ¯ }. Побудова ДДНФ за таблицею істинності.

Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ). Побудова ДКНФ за таблицею істинності.

Повна система булевих функцій. Повнота системи {&, V, ¯ }. Теорема про повні системи функцій. Повнота системи {&, ¯ }. Повнота системи {V, ¯ }. Повнота системи штрих Шеффера. Повнота системи стрілка Пірса.

Список термінів

1. **Елементарна кон'юнкція**
2. **Елементарна диз'юнкція**
3. **Досконала диз'юнктивна нормальна форма (ДДНФ)**
4. **Сума добутків**
5. **Добуток сум**
6. **Досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ)**
7. **Повна система булевих функцій**

Теорема двоїстості

Теорема двоїстості. Нехай $f_0 = f_0\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$,

$$f_1 = f_1\left(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1i_1}\right),$$
$$f_2 = f_2\left(x_{21}, x_{22}, ..., x_{2i_2}\right),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_k = f_k\left(x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{ki_k}\right) \text{– булеві функції.}$$

$\Phi\left(y_1, y_2, ..., y_l\right) = f_0\left(f_1\left(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1i_1}\right),\ f_2\left(x_{21}, x_{22}, ..., x_{2i_2}\right), \ldots,\ f_k\left(x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{ki_k}\right)\right)$

– елементарна суперпозиція функцій $f_0, f_1, f_2, ..., f_k$. Тоді $\Phi^*\left(y_1, y_2, ..., y_l\right) =$

$= f_0^*\left(f_1^*\left(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1i_1}\right),\ f_2^*\left(x_{21}, x_{22}, ..., x_{2i_2}\right), \ldots,\ f_k^*\left(x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{ki_k}\right)\right)$.

Двоїста функція до елементарної суперпозиції – це елементарна суперпозиція двоїстих функцій.

Доведення. За означенням двоїстої функції $\Phi^*\left(y_1, y_2, ..., y_l\right) =$

$= \overline{f}_0\left(f_1\left(\overline{x}_{11}, \overline{x}_{12}, ..., \overline{x}_{1i_1}\right),\quad f_2\left(\overline{x}_{21}, \overline{x}_{22}, ..., \overline{x}_{2i_2}\right), \ldots,\quad f_k\left(\overline{x}_{k1}, \overline{x}_{k2}, ..., \overline{x}_{ki_k}\right)\right) =$

$= \left\{ \begin{matrix} \textit{закон} \\ \textit{подв.запереч.} \end{matrix} \right\} = \overline{f}_0\left(\overline{\overline{f}}_1\left(\overline{x}_{11}, \overline{x}_{12}, ..., \overline{x}_{1i_1}\right), \overline{\overline{f}}_2\left(\overline{x}_{21}, \overline{x}_{22}, ..., \overline{x}_{2i_2}\right), \ldots,\right.$

$\left.\overline{\overline{f}}_k\left(\overline{x}_{k1}, \overline{x}_{k2}, ..., \overline{x}_{ki_k}\right)\right) = \overline{f}_0\left(\overline{f}_1^*\left(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1i_1}\right), \overline{f}_2^*\left(x_{21}, x_{22}, ..., x_{2i_2}\right), \ldots,\right.$

$\left.\overline{f}_k^*\left(x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{ki_k}\right)\right)$.

Введемо позначення

$$f_1^*\left(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1i_1}\right) = z_1,$$
$$f^*{}_2\left(x_{21}, x_{22}, ..., x_{2i_2}\right) = z_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$f^*{}_k\left(x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{ki_k}\right) = z_k$. Тоді

$$\Phi^*\left(y_1, y_2, ..., y_l\right) = \overline{f}_0\left(\overline{z}_1, \overline{z}_2, ..., \overline{z}_k\right) = f^*{}_0\left(z_1, z_2, ..., z_k\right) =$$

$$= f_0^*\left(f_1^*\left(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1i_1}\right),\ f_2^*\left(x_{21}, x_{22}, ..., x_{2i_2}\right), \ldots,\ f_k^*\left(x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{ki_k}\right)\right).$$

Теорему доведено.

З теореми випливає **Принцип двоїстості**: якщо функція f реалізується формулою U, яка побудована з функцій $f_1, f_2, ..., f_k$

$$U = C\left[f_1, f_2, ..., f_k\right],$$

то двоїста функція f^* реалізується формулою, яку називають двоїстою до формули U, її позначають U^*

$$U^* = C\left[f_1^*, f_2^*, \ldots, f_k^* \right].$$

Приклад. Формула $\overline{x \vee y}$ реалізує булеву функцію $f = (1000)$. В цьому можемо переконатися шляхом побудови таблиці істинності (рис.38).

x	y	$x \vee y$	$\overline{x \vee y}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

Рисунок 38 – Таблиця істинності для $\overline{x \vee y}$

Двоїстою до функції $f = (1000)$ є функція $f^* = (1110)$. Її реалізує формула

$$f^* = \left(\overline{x \vee y}\right)^* = \overline{\overline{\overline{x} \vee \overline{y}}} = \overline{x} \vee \overline{y} = \overline{x \& y}.$$

Перевіримо, що формула $\overline{x \& y}$ реалізує булеву функцію (1110). Для цього побудуємо її таблицю істинності (рис.39).

x	y	$x \& y$	$\overline{x \& y}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Рисунок 39 – Таблиця істинності для $\overline{x \& y}$

Наслідок принципу двоїстості. Якщо функція φ реалізується формулою над множиною функцій

$$L = \left\{0, 1, \&, \vee, ^{-}\right\},$$

то двоїста до неї функція φ^* реалізується формулою також над L.

Дійсно, за принципом двоїстості з того, що φ реалізується над множиною $L = \left\{0, 1, \&, \vee, ^{-}\right\}$ випливає , що φ^* реалізується формулою над множиною $\left\{0^*,1^*,\&^*,\vee^*,\bar{\ }^*\right\}=\left\{1,0,\vee,\&,\bar{\ }\right\}=L$.

Розкладання булевих функцій за змінними

Введемо позначення

$$x^{\sigma}=\begin{cases} x, & \sigma=1 \\ \bar{x}, & \sigma=0 \end{cases}.$$

Розглянемо 0^{σ} та 1^{σ}.

$$0^{\sigma}=\begin{cases} 0, & \sigma=1 \\ 1, & \sigma=0 \end{cases} \qquad 1^{\sigma}=\begin{cases} 1, & \sigma=1 \\ 0, & \sigma=0 \end{cases}.$$

Звідси випливає, що $x^{\sigma}=1 \Leftrightarrow x=\sigma$.

Означення. Функція виду $x_1^{\sigma_1}\,\&\,x_2^{\sigma_2}\,\&\ldots\&\,x_k^{\sigma_k}=\mathop{\&}\limits_{i=1}^{k}x_i^{\sigma_i}$, де $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k\in\{0,1\}$ називається **елементарною кон'юнкцією**.

Означення. Функція виду $x_1^{\sigma_1}\vee x_2^{\sigma_2}\vee\ldots\vee x_k^{\sigma_k}=\mathop{\vee}\limits_{i=1}^{k}x_i^{\sigma_i}$, де $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k\in\{0,1\}$ називається **елементарною диз'юнкцією**.

Теорема (про розкладання булевих функцій за змінними).

Будь-яку булеву функцію $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ можна подати у такому вигляді

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\mathop{\vee}\limits_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k)}x_1^{\sigma_1}\cdot x_2^{\sigma_2}\cdot\ldots\cdot x_k^{\sigma_k}\cdot f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k,x_{k+1},\ldots,x_n). \quad (1)$$

Формулу (1) називають **розкладанням булевої функції за першими** k **змінними.**

Доведення. Для доведення достатньо показати, що при підстановці будь-якого набору в формулу (1) вона перетворюється на тотожність.

Візьмемо довільний набір $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ та підставимо в (1).

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=\mathop{\vee}\limits_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k)}\alpha_1^{\sigma_1}\cdot\alpha_2^{\sigma_2}\cdot\ldots\cdot\alpha_k^{\sigma_k}\cdot f(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n).$$

У цій сумі не дорівнюють нулю лише ті доданки, для яких $\alpha_i=\sigma_i$, $\forall i=\overline{1,k}$. Такий доданок лише один:

$$\alpha_1^{\alpha_1}\cdot\alpha_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\alpha_k^{\alpha_k}\cdot f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n)=f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n).$$

Теорему доведено.

Наслідок 1. Розкладання булевої функції **за однією змінною** має вигляд:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\underset{\sigma_1}{\vee} x_1^{\sigma_1}\cdot f(\sigma_1,x_2,...,x_n)=$$
$$= x_1^1\cdot f(1,x_2,...,x_n)\vee x_1^0\cdot f(0,x_2,...,x_n) =$$
$$= x_1\cdot f(1,x_2,...,x_n)\vee \overline{x}_1\cdot f(0,x_2,...,x_n).$$

Наслідок 2. Розкладання булевої функції **за всіма змінними** має вигляд:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\underset{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)}{\vee} x_1^{\sigma_1}\cdot x_2^{\sigma_2}\cdot ...\cdot x_n^{\sigma_n}\cdot f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n).$$

У цьому виразі ненульові ті доданки, для яких $f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=1$. Тому у формулі можна залишити лише ці доданки:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\underset{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n):\,f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=1}{\vee} x_1^{\sigma_1}\cdot x_2^{\sigma_2}\cdot ...\cdot x_n^{\sigma_n}. \qquad (2)$$

(2) – **досконала диз'юнктивна нормальна форма** (**ДДНФ**).

Теорема. Будь-яку булеву функцію можна подати у вигляді формули над множиною функцій $\{\&,\vee,\overline{\ }\}$.

Доведення. Якщо $f(x_1,x_2,...,x_n)=0 \quad \forall(x_1,x_2,...,x_n)$, тобто f – функція нуль, то її можна подати так: $f(x_1,x_2,...,x_n)=x_1\cdot\overline{x}_1$. Якщо f не функція нуль, то існує хоча б один набір $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$: $f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=1$. Тоді $f(x_1,x_2,...,x_n)$ можна записати у вигляді ДДНФ за формулою (2).

Теорему доведено.

Це конструктивна теорема. Вона дає можливість для будь-якої функції (що не є нулем) побудувати формулу, яка реалізує функцію у вигляді ДДНФ.

Побудова ДДНФ за таблицею істинності

1) У таблиці знаходимо всі набори, на яких функція приймає значення 1.
2) За всіма такими наборами будуємо елементарні кон'юнкції.
3) Записуємо суму елементарних кон'юнкцій

$$\underset{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n):\,f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=1}{\vee} x_1^{\sigma_1}\cdot x_2^{\sigma_2}\cdot ...\cdot x_n^{\sigma_n}.$$

Приклад. Нехай задана булева функція $f(x_1,x_2,x_3)$ (рис.40).

За таблицею істинності побудуємо ДДНФ.

1) $f=1$ на наборах (001), (010), (101).

2) За набором (001) будуємо елементарну кон'юнкцію $x_1^0\cdot x_2^0\cdot x_3^1=\overline{x}_1\cdot\overline{x}_2\cdot x_3$.

За набором (010) – елементарну кон'юнкцію $x_1^0\cdot x_2^1\cdot x_3^0=\overline{x}_1\cdot x_2\cdot\overline{x}_3$.

За набором (101) – елементарну кон'юнкцію $x_1^1 \cdot x_2^0 \cdot x_3^1 = x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3$.

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Рисунок 40 – Таблиця істинності булевої функції

3) Записуємо суму елементарних кон'юнкцій: $f(x_1,x_2,x_3) = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \vee x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3$.

Вираз (2) називають **сумою добутків**. Виникає питання: чи можливо булеву функцію подати у вигляді **добутку сум**?

Досконалі кон'юнктивні нормальні форми (ДКНФ)

Нехай $f(x_1,x_2,...,x_n)$– довільна булева функція, але не одиниця. Нехай $f^*(x_1,x_2,...,x_n)$ – двоїста до неї функція. Тоді $f^*(x_1,x_2,...,x_n)$ не є нулем. Її можна подати у вигляді ДДНФ:

$$f^*(x_1,x_2,...,x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n):\, f^*(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_n^{\sigma_n}. \qquad (3)$$

Використаємо той факт, що $\left(f^*\right)^* = f$. Знайдемо двоїсті функції до лівої та правої частин (3).

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = \mathop{\&}_{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n):\, f^*(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee ... \vee x_n^{\sigma_n}.$$

За означенням двоїстої функції $f^*(x_1,x_2,...,x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1,\overline{x}_2,...,\overline{x}_n)$. Тоді

$$f^*(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n) = \overline{f}(\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,...,\overline{\sigma}_n) = 1,$$

$$f(\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,...,\overline{\sigma}_n) = \overline{1} = 0.$$

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = \mathop{\&}_{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n):\, f(\overline{\sigma}_1,\overline{\sigma}_2,...,\overline{\sigma}_n)=0} x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee ... \vee x_n^{\sigma_n}.$$

Введемо позначення: $\alpha_i = \overline{\sigma}_i, i = \overline{1,n}$.

$$f\left(x_1,x_2,\dots,x_n\right)=\underset{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n):\,f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=0}{\&} x_1^{\overline{\alpha}_1}\vee x_2^{\overline{\alpha}_2}\vee\dots\vee x_n^{\overline{\alpha}_n}. \qquad (4)$$

(4) – **досконала кон'юнктивна нормальна форма (ДКНФ)**, (4) – це добуток елементарних диз'юнкцій, добуток сум.

Побудова ДКНФ за таблицею істинності

1) У таблиці знаходимо всі набори, на яких функція приймає значення 0.
2) За всіма такими наборами будуємо елементарні диз'юнкції.
3) Записуємо добуток елементарних диз'юнкцій

$$\underset{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n):\,f(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)=0}{\&} x_1^{\overline{\alpha}_1}\vee x_2^{\overline{\alpha}_2}\vee\dots\vee x_n^{\overline{\alpha}_n}.$$

Приклад. Нехай задана булева функція $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ (рис.40).

За таблицею істинності побудуємо ДКНФ.

1) $f=0$ на наборах (000), (011), (100), (110), (111).

2) За набором (000) будуємо елементарну диз'юнкцію

$$x_1^{\overline{0}}\vee x_2^{\overline{0}}\vee x_3^{\overline{0}}=x_1^1\vee x_2^1\vee x_3^1=x_1\vee x_2\vee x_3.$$

За набором (011) – елементарну диз'юнкцію

$$x_1^{\overline{0}}\vee x_2^{\overline{1}}\vee x_3^{\overline{1}}=x_1^1\vee x_2^0\vee x_3^0=x_1\vee \overline{x}_2\vee \overline{x}_3.$$

За набором (100) – елементарну диз'юнкцію

$$x_1^{\overline{1}}\vee x_2^{\overline{0}}\vee x_3^{\overline{0}}=x_1^0\vee x_2^1\vee x_3^1=\overline{x}_1\vee x_2\vee x_3.$$

За набором (110) – елементарну диз'юнкцію

$$x_1^{\overline{1}}\vee x_2^{\overline{1}}\vee x_3^{\overline{0}}=x_1^0\vee x_2^0\vee x_3^1=\overline{x}_1\vee \overline{x}_2\vee x_3.$$

За набором (111) – елементарну диз'юнкцію

$$x_1^{\overline{1}}\vee x_2^{\overline{1}}\vee x_3^{\overline{1}}=x_1^0\vee x_2^0\vee x_3^0=\overline{x}_1\vee \overline{x}_2\vee \overline{x}_3.$$

3) Записуємо добуток елементарних диз'юнкцій:

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\left(x_1\vee x_2\vee x_3\right)\&\left(x_1\vee \overline{x}_2\vee \overline{x}_3\right)\&$$
$$\&\left(\overline{x}_1\vee x_2\vee x_3\right)\&\left(\overline{x}_1\vee \overline{x}_2\vee x_3\right)\&\left(\overline{x}_1\vee \overline{x}_2\vee \overline{x}_3\right).$$

Повнота систем булевих функцій

Ми вже знаємо, що будь-яку булеву функцію можна подати у вигляді формули над множиною функцій $\left\{\&,\vee,\overline{}\right\}$. Чи існують ще системи функцій, над якими це можна зробити?

Означення. Система булевих функцій називається **повною**, якщо будь-яку булеву функцію можна подати у вигляді формули над множиною функцій цієї системи.

$\{\&, \vee, \bar{\ }\}$ – повна система функцій.

Розширення повної системи функцій (додавання нових функцій) не змінює властивість повноти.

P_2 (множина всіх булевих функцій) – повна система функцій.

Теорема (про повні системи функцій). Нехай $D = \{d_1, d_2, ..., d_l\}$ – повна система функцій, така, що кожна її функція може бути поданою у вигляді формули над множиною функцій системи $G = \{g_1, g_2, ..., g_k\}$. Тоді G – повна система функцій.

Доведення. Скористаємося тим, що D – повна система функцій. Тоді довільну булеву функцію $f \in P_2$ можна реалізувати над множиною функцій системи D:

$$f = C[d_1, d_2, ..., d_l].$$

За умовою теореми кожна функція системи D реалізується формулою над множиною функцій системи G:

$$d_i = C_i[g_1, g_2, ..., g_k], \quad i = \overline{1, l}.$$

Тоді $f = C\big[C_1[g_1, g_2, ..., g_k], C_2[g_1, g_2, ..., g_k], ..., C_l[g_1, g_2, ..., g_k]\big]$.

Теорему доведено.

З цієї теореми випливає, що система $G = \{\&, \bar{\ }\}$ повна. Покажемо це. В якості системи D візьмемо $D = \{\&, \vee, \bar{\ }\}$. Для доведення повноти системи G достатньо показати, що диз'юнкцію можна подати у вигляді формули над множиною функцій $\{\&, \bar{\ }\}$.

Відомо, що $\overline{x \vee y} = \bar{x} \,\&\, \bar{y}$. Звідси $x \vee y = \overline{\bar{x} \,\&\, \bar{y}}$, що й треба було.

З теореми випливає, що система $G = \{\vee, \bar{\ }\}$ повна. Покажемо це. В якості системи D візьмемо $D = \{\&, \vee, \bar{\ }\}$. Для доведення повноти системи G достатньо показати, що кон'юнкцію можна подати у вигляді формули над множиною функцій $\{\vee, \bar{\ }\}$.

Відомо, що $\overline{x \,\&\, y} = \bar{x} \vee \bar{y}$. Звідси $x \,\&\, y = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$, що й треба було.

Таким чином, повними є системи функцій

$$\{\&, \vee, \bar{\ }\}, \{\&, \bar{\ }\}, \{\vee, \bar{\ }\}.$$

Покажемо, що функція Шеффера (штрих Шеффера) є повною системою. Нехай $G=\{\,|\,\}$, а повна система $D=\{\&,\,\bar{}\,\}$. Треба показати, що кон'юнкцію та заперечення можна виразити через штрих Шеффера.

Заперечення представимо такою формулою:

$$\bar{x}=x|x\ .$$

Виконаємо перевірку цієї формули (рис.41).

$\bar{x}$	=	x	|	x
1		0	1	0
0		1	0	1

Рисунок 41 – Таблиця істинності для перевірки формули

З того, що $x|y=\overline{x\,\&\,y}$, маємо $x\,\&\,y=\overline{x|y}$. Тоді $x\,\&\,y=(x|y)|(x|y)$. Виконаємо перевірку цієї формули (рис.42).

x	&	$y=$	$(x$	|	$y)$	|	$(x$	|	$y)$
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1	1	1	0	1

Рисунок 42 – Таблиця істинності для перевірки формули

Отже, за теоремою, $G=\{\,|\,\}$ – повна система функцій.

Покажемо, що функція Пірса (стрілка Пірса) є повною системою. Нехай $G=\{\downarrow\}$, а повна система $D=\{\vee,\,\bar{}\,\}$. Треба показати, що диз'юнкцію та заперечення можна виразити через стрілку Пірса.

Заперечення представимо такою формулою:

$$\bar{x}=x\downarrow x\ .$$

Виконаємо перевірку цієї формули (рис.43).

З того, що $x\downarrow y=\overline{x\vee y}$, маємо $x\vee y=\overline{x\downarrow y}$. Тоді $x\vee y=(x\downarrow y)\downarrow(x\downarrow y)$. Виконаємо перевірку цієї формули (рис.44).

$\overline{x}$ =	x	$\downarrow$	x
1	0	1	0
0	1	0	1

Рисунок 43 – Таблиця істинності для перевірки формули

x	$\vee$	$y=$	$(x$	$\downarrow$	$y)$	$\downarrow$	$(x$	$\downarrow$	$y)$
0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	0	1

Рисунок 44 – Таблиця істинності для перевірки формули

Отже, за теоремою, $G=\{\downarrow\}$ – повна система функцій.

Список повних систем функцій: $\{\&,\vee,\bar{\ }\}$, $\{\&,\bar{\ }\}$, $\{\vee,\bar{\ }\}$, $\{\,|\,\}$, $\{\downarrow\}$.

ЛЕКЦІЯ 7

ТЕМА: Поліном Жегалкіна

План лекції

Повнота системи функцій {0, 1, &, $\oplus$} . Подання заперечення через функції системи Жегалкіна. Поліном Жегалкіна. Загальний вигляд полінома Жегалкіна *n* = 1, 2, 3 змінних. Число поліномів Жегалкіна *n* = 1, 2, 3 змінних. Перша теорема Жегалкіна (існування полінома Жегалкіна для кожної булевої функції). Побудова полінома Жегалкіна. Подання диз'юнкції через функції системи Жегалкіна. Друга теорема Жегалкіна (єдиність полінома Жегалкіна для кожної булевої функції). Число поліномів Жегалкіна *n* змінних.

Список термінів

1. **Система Жегалкіна**
2. **Поліном Жегалкіна**

Поліном Жегалкіна

Система функцій $\{0,1,\&,\oplus\}$ повна. Покажемо це. Нехай $G=\{0,1,\&,\oplus\}$, $D=\{\&,^{-}\}$ (це повна система). Покажемо, що функції системи D можна виразити через функції системи G. Кон'юнкція міститься в G, отже, ми маємо показати, що заперечення можна подати формулою над G. Це зроблено за допомогою таблиці істинності на рис.45.

$\bar{x}$	=	1	$\oplus$	x
1		1	1	0
0		1	0	1

Рисунок 45 – Таблиця істинності для перевірки формули

За теоремою про повні системи G – повна система функцій, будемо її називати **системою Жегалкіна**.

Поліномом Жегалкіна від змінних $x_1,x_2,...,x_n$ будемо називати поліном, коефіцієнти якого – булеві константи $\{0,1\}$, множення – це $\&$, додавання – це $\oplus$, і кожна змінна входить у поліном у першому степені.

Наприклад, алгебраїчному поліному a_0+a_1x відповідає поліном Жегалкіна $a_0\oplus a_1\cdot x$, де $a_0,a_1\in\{0,1\}$.

Запишемо загальний вигляд полінома Жегалкіна для числа змінних $n=1,2,3$.

$n=1$, змінна x_1, загальний вигляд полінома $a_0\oplus a_1\cdot x_1$, де $a_0,a_1\in\{0,1\}$. Таких поліномів лише чотири (число наборів довжини 2 з нулів та одиниць дорівнює $2\cdot 2=4$):

$0\oplus 0\cdot x_1=0$,

$0\oplus 1\cdot x_1=x_1$,

$1\oplus 0\cdot x_1=1$,

$1\oplus 1\cdot x_1=\bar{x}_1$.

$n=2$, змінні x_1,x_2, загальний вигляд полінома $a_0\oplus a_1\cdot x_1\oplus a_2\cdot x_2\oplus a_{12}\cdot x_1\cdot x_2$, де $a_0,a_1,a_2,a_{12}\in\{0,1\}$. Таких поліномів стільки, скільки існує наборів довжини 4 з нулів та одиниць, тобто 16. Приклад полінома: $1\oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1 \cdot x_2$.

$n=3$, змінні x_1, x_2, x_3, загальний вигляд полінома $a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_3x_3 \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus a_{23}x_2x_3 \oplus a_{123}x_1x_2x_3$, де всі коефіцієнти – булеві константи. Таких поліномів стільки, скільки існує наборів довжини 8 з нулів та одиниць, тобто $2^8 = 256$. Приклад полінома: $1\oplus x_1 \oplus x_1x_2x_3$.

Перша теорема Жегалкіна. Будь-яку булеву функцію можна записати у вигляді полінома Жегалкіна.

Схема доведення. Якщо $f=0$, то $f=a_0$, де $a_0=0$, отже, $f=0$ записали у вигляді полінома Жегалкіна. Якщо $f=1$, то $f=a_0$, де $a_0=1$, отже, $f=1$ записали у вигляді полінома Жегалкіна. Нехай $f\neq 0$ та $f\neq 1$. Для функції f побудуємо ДДНФ. У результаті ми подали функцію f формулою над множиною $\{\&,\vee,\bar{\ }\}$. Використовуючи закон де Моргана, виразимо диз'юнкцію через $\&$ та заперечення. Потім позбавимося від заперечення за формулою $\bar{x} = x\oplus 1$. В результаті ми отримаємо формулу над множиною $\{0,1,\&,\oplus\}$. Це або поліном Жегалкіна, або вираз, який можна перетворити на поліном Жегалкіна.

Приклад. Функцію $f=(0001\ 0100)$ записати у вигляді полінома Жегалкіна.

Розв'язання. Для функції $f=(0001\ 0100)$ побудуємо ДДНФ. Маємо таку таблицю істинності (рис.46).

x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Рисунок 46 – Таблиця істинності булевої функції

$f=\overline{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\vee x_1\cdot\overline{x}_2\cdot x_3$ – це ДДНФ. Закон де Моргана: $\overline{x\vee y}=\overline{x}\,\&\,\overline{y}\Rightarrow x\vee y=\overline{\overline{x}\,\&\,\overline{y}}$. Звідси $f=\overline{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\vee x_1\cdot\overline{x}_2\cdot x_3=$ $\overline{\overline{\overline{x}_1\cdot x_2\cdot x_3}\,\&\,\overline{x_1\cdot\overline{x}_2\cdot x_3}}$. Позбавимося від заперечень.

$$f=\overline{\overline{\overline{x}_1\cdot x_2\cdot x_3}\,\&\,\overline{x_1\cdot\overline{x}_2\cdot x_3}}=\overline{\overline{(x_1\oplus1)x_2x_3}\,\&\,\overline{x_1(x_2\oplus1)x_3}}=$$

$$=\overline{((x_1\oplus1)x_2x_3\oplus1)\cdot(x_1(x_2\oplus1)x_3\oplus1)}=((x_1\oplus1)x_2x_3\oplus1)\cdot(x_1(x_2\oplus1)x_3\oplus1)\oplus1$$

В результаті ми отримали формулу над множиною $\{0,1,\&,\oplus\}$. Це не поліном Жегалкіна, це вираз, який можна перетворити на поліном Жегалкіна. Перетворення:

$$f=((x_1\oplus1)x_2x_3\oplus1)\cdot(x_1(x_2\oplus1)x_3\oplus1)\oplus1=$$
$$=(x_1x_2x_3\oplus x_2x_3\oplus1)\cdot(x_1x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus1)\oplus1=$$
$$=x_1x_2x_3x_1x_2x_3\oplus x_1x_2x_3x_1x_3\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2x_3x_2x_3\oplus$$
$$\oplus x_2x_3x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus1\oplus1=$$
$$=x_1x_2x_3\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2x_3\oplus x_2x_3x_1\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus1\oplus1=$$
$$=x_1x_3\oplus x_2x_3.$$

$f=x_1x_3\oplus x_2x_3$ – це поліном Жегалкіна.

При перетвореннях ми використали формули:

1) $(x\oplus y)\cdot z=x\cdot z\oplus y\cdot z$
2) $x\cdot x=x$
3) $x\oplus x=0$
4) $x\oplus0=x$

У справедливості цих формул можна переконатися за допомогою таблиць істинності.

Для того, щоби позбавитися від диз'юнкції можна замість закону де Моргана скористатися формулою

$$x\vee y=x\oplus y\oplus x\cdot y.$$

Покажемо, що формула справедлива. Для цього побудуємо таблиці істинності для обох частин формули (рис.47).

Покажемо, як у прикладі можна скористатися цією формулою.

Маємо ДДНФ: $f=\overline{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\vee x_1\cdot\overline{x}_2\cdot x_3$. За формулою $x\vee y=x\oplus y\oplus x\cdot y$, тоді

$$f=\overline{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\oplus x_1\cdot\overline{x}_2\cdot x_3\oplus\overline{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_1\cdot\overline{x}_2\cdot x_3.$$

Кон'юнкція – переставна операція. $x\cdot\overline{x}=0$. Отже,

$$f=\overline{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\oplus x_1\cdot\overline{x}_2\cdot x_3\oplus0=\overline{x}_1\cdot x_2\cdot x_3\oplus x_1\cdot\overline{x}_2\cdot x_3.$$

x	$\vee$	y	$=$	x	$\oplus$	y	$\oplus$	x	$\&$	y
0	0	0		0	0	0	0	0	0	0
0	1	1		0	1	1	1	0	0	1
1	1	0		1	1	0	1	1	0	0
1	1	1		1	0	1	1	1	1	1

Рисунок 47 – Таблиця істинності для перевірки формули

Позбавляємося від заперечення:

$$f=(x_1\oplus 1)\cdot x_2\cdot x_3\oplus x_1\cdot(x_2\oplus 1)\cdot x_3= x_1\cdot x_2\cdot x_3\oplus x_2\cdot x_3\oplus x_1\cdot x_2\cdot x_3\oplus x_1\cdot x_3.$$

$\oplus$ – переставна операція. $x\oplus x=0$. Отже,

$$f=x_1x_3\oplus x_2x_3\oplus 0=x_1x_3\oplus x_2x_3\,.$$

Друга теорема Жегалкіна. Подання булевої функції у вигляді полінома Жегалкіна єдине.

Доведення. Будь-який поліном Жегалкіна від n змінних однозначно визначається набором своїх коефіцієнтів.

$n=1\;\; a_0, a_1$

$n=2\;\; a_0, a_1, a_2, a_{12}$

$n=3\;\; a_0, a_1, a_2, a_3, a_{12}, a_{13}, a_{23}, a_{123}$

… ………………

Довжина набору – 2^n. Загальне число поліномів Жегалкіна від n змінних дорівнює 2^{2^n}. Це число збігається з числом булевих функцій від n змінних. Кожному поліному Жегалкіна відповідає точно одна булева функція. Для кожної булевої функції існує подання у вигляді полінома Жегалкіна. З усього цього випливає, що відповідність між булевими функціями та поліномами Жегалкіна взаємно однозначна.

Теорему доведено.

ЛЕКЦІЯ 8

ТЕМА: Замкненість систем булевих функцій. Основні замкнені класи. Теорема Поста

План лекції

Замикання множини булевих функцій. Приклади замикань. Властивості операції замикання. Повнота системи функцій в термінах замикання. Замкнена система функцій.

Клас функцій, які зберігають нуль (означення, приклади, доведення замкненості). Клас функцій, які зберігають одиницю (означення, приклади, доведення замкненості). Клас самодвоїстих функцій (означення, приклади, доведення замкненості). Відношення передування. Відношення передування для наборів довжини 2, 3. Означення монотонної функції. Клас монотонних функцій (означення, приклади, доведення замкненості). Клас лінійних функцій (означення, приклади, замкненість).

Теорема Поста про повноту системи функцій. Перевірка системи функцій на повноту за допомогою теореми Поста.

Список термінів

1. **Замикання множини булевих функцій**
2. **Повна система булевих функцій**
3. **Замкнена система булевих функцій**
4. **Клас T_0**
5. **Функція, яка зберігає нуль**
6. **Клас T_1**
7. **Функція, яка зберігає одиницю**
8. **Клас *S***
9. **Самодвоїста функція**
10. **Клас *M***
11. **Бінарне відношення передування**
12. **Монотонна функція**
13. **Клас *L***
14. **Лінійна функція**

Замкненість систем булевих функцій

Нехай D – деяка множина булевих функцій, $D \subseteq P_2$.

Означення. **Замиканням множини** D називається множина булевих функцій, таких, що кожна функція з цієї множини може бути подана у вигляді формули над D.

Позначення замикання: $\left[D\right]$.

$f \in \left[D\right] \quad \Leftrightarrow \quad f$ можна побудувати з функцій множини D за допомогою операції суперпозиції.

Приклади замикань:

$[P_2]=P_2$

$[\{0,1\}]=\{0,1\}$

$[\{\overline{x}\}]=\{x,\overline{x}\}$

$[\{0,\overline{x}\}]=\{0,1,x,\overline{x}\}$

Властивості операції замикання

1. $D\subseteq[D]$

2. $[[D]]=[D]$

3. Якщо $D_1\subseteq D_2$, то $[D_1]\subseteq[D_2]$

4. $[D_1]\cup[D_2]\subseteq[D_1\cup D_2]$

Система функцій D є повною $\Leftrightarrow$ її замикання $[D]$ збігається з множиною всіх булевих функцій P_2: $[D]=P_2$.

Означення. Система функцій D називається **замкненою** (**замкненим класом**), якщо вона збігається зі своїм замиканням: $D=[D]$.

Приклад. $[\{0,1\}]=\{0,1\}$.

Основні замкнені класи

1) T_0 **– клас функцій, які зберігають нуль**.

$$f\in T_0 \Leftrightarrow f(00...0)=0.$$

$f(x)=x$ (тотожність), $f\in T_0$, тому що $f(0)=0$.

$f(x)=\overline{x}$ (заперечення), $f\notin T_0$, тому що $f(0)=\overline{0}=1$.

$f(x)=0$ (нуль), $f\in T_0$, тому що $f(0)=0$.

$f(x)=1$ (одиниця), $f\notin T_0$, тому що $f(0)=1$.

$f(x,y)=x\,\&\,y$ (кон'юнкція), $f\in T_0$, тому що $f(0,0)=0\,\&\,0=0$.

$f(x,y)=x\vee y$ (диз'юнкція), $f\in T_0$, тому що $f(0,0)=0\vee 0=0$.

$f(x,y)=x\oplus y$ (виключне або), $f\in T_0$, тому що $f(0,0)=0\oplus 0=0$.

$f(x,y)=x\to y$ (імплікація), $f\notin T_0$, тому що $f(0,0)=0\to 0=1$.

$f(x,y)=x\equiv y$ (еквіваленція), $f\notin T_0$, тому що $f(0,0)=0\equiv 0=1$.

$f(x,y)=x|y$ (штрих Шеффера), $f\notin T_0$, тому що $f(0,0)=0|0=1$.

$f(x,y)=x\downarrow y$ (стрілка Пірса), $f\notin T_0$, тому що $f(0,0)=0\downarrow 0=1$.

Інформація про приналежність та неприналежність елементарних булевих функцій класу функцій, що зберігають нуль, зібрано у таблицю (рис.48).

$f \in T_0$	$x, 0, \&, \vee, \oplus$
$f \notin T_0$	$\bar{x}, 1, \to, \equiv, \vert, \downarrow$

Рисунок 48 – Приналежність булевих функцій класу T_0

Доведемо, що клас T_0 замкнений. Для цього достатньо показати, що елементарна суперпозиція функцій з класу T_0 також входить в T_0.

Нехай $f_0 = f_0\left(x_1, x_2, ..., x_k\right)$,

$f_1 = f_1\left(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1i_1}\right)$,

$f_2 = f_2\left(x_{21}, x_{22}, ..., x_{2i_2}\right)$,

....

$f_k = f_k\left(x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{ki_k}\right)$ – булеві функції, всі належать T_0.

$$\Phi\left(y_1, y_2, ..., y_l\right) = f_0(\ f_1\left(x_{11}, x_{12}, ..., x_{1i_1}\right),\ f_2\left(x_{21}, x_{22}, ..., x_{2i_2}\right), \ldots,\ f_k\left(x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{ki_k}\right))$$

– елементарна суперпозиція функцій $f_0, f_1, f_2, ..., f_k$.

$$\Phi\left(0,0,...,0\right) = f_0(\ f_1\left(0,0,...,0\right), f_2\left(0,0,...,0\right), \ldots, f_k\left(0,0,...,0\right)) = \ f_0\left(0,0,...,0\right) = 0.$$

2) T_1 **– клас функцій, які зберігають одиницю**.

$$f \in T_1 \Leftrightarrow f\left(11...1\right) = 1.$$

$f\left(x\right) = x$ (тотожність), $f \in T_1$, тому що $f\left(1\right) = 1$.

$f\left(x\right) = \bar{x}$ (заперечення), $f \notin T_1$, тому що $f\left(1\right) = \bar{1} = 0$.

$f\left(x\right) = 0$ (нуль), $f \notin T_1$, тому що $f\left(1\right) = 0$.

$f\left(x\right) = 1$ (одиниця), $f \in T_1$, тому що $f\left(1\right) = 1$.

$f\left(x, y\right) = x \,\&\, y$ (кон’юнкція), $f \in T_1$, тому що $f\left(1,1\right) = 1 \& 1 = 1$.

$f\left(x, y\right) = x \vee y$ (диз’юнкція), $f \in T_1$, тому що $f\left(1,1\right) = 1 \vee 1 = 1$.

$f\left(x, y\right) = x \oplus y$ (виключне або), $f \notin T_1$, тому що $f\left(1,1\right) = 1 \oplus 1 = 0$.

$f\left(x, y\right) = x \to y$ (імплікація), $f \in T_1$, тому що $f\left(1,1\right) = 1 \to 1 = 1$.

$f\left(x, y\right) = x \equiv y$ (еквіваленція), $f \in T_1$, тому що $f\left(1,1\right) = 1 \equiv 1 = 1$.

$f\left(x, y\right) = x | y$ (штрих Шеффера), $f \notin T_1$, тому що $f\left(1,1\right) = 1 | 1 = 0$.

$f(x,y) = x \downarrow y$ (стрілка Пірса), $f \notin T_1$, тому що $f(1,1) = 1 \downarrow 1 = 0$.

Інформація про приналежність та неприналежність елементарних булевих функцій класу функцій, що зберігають одиницю, зібрано у таблицю (рис.49).

$f \in T_1$	$x,1,\&,\vee,\rightarrow,\equiv$
$f \notin T_1$	$\overline{x},0,\oplus,\vert,\downarrow$

Рисунок 49 – Приналежність булевих функцій класу T_1

Доведемо, що клас T_1 замкнений. Для цього достатньо показати, що елементарна суперпозиція функцій з класу T_1 також входить в T_1.

$\Phi(1,1,...,1) = f_0(\ f_1(1,1,...,1),\ f_2(1,1,...,1),\dots,\ f_k(1,1,...,1)) = f_0(1,1,...,1) = 1$.

3) S **– клас самодвоїстих функцій**.

$$f \in S \Leftrightarrow f = f^*.$$

$f \in S$	$x,\overline{x}$
$f \notin S$	$0,1,\&,\vee,\oplus,\rightarrow,\equiv,\vert,\downarrow$

Рисунок 50 – Приналежність булевих функцій класу S

Самодвоїстість функції перевіряють за допомогою таблиці істинності. Приклад такої перевірки можна побачити на рис.51.

x	y	$\equiv$	$\equiv^*$
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Рисунок 51 – Перевірка функції на самодвоїстість

Два набори називаються **протилежними**, якщо значення координат в цих наборах протилежні: $(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n)$ та $(\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2...\overline{\alpha}_n)$.

На протилежних наборах самодвоїста функція приймає протилежні значення:

$$f\left(x_1x_2...x_n\right)=\overline{f}\left(\overline{x}_1\overline{x}_2...\overline{x}_n\right).$$

Доведемо, що клас S замкнений. Для цього достатньо показати, що елементарна суперпозиція функцій з класу S також входить в S.

Нехай $f_0=f_0\left(x_1,x_2,...,x_k\right)$,

$f_1=f_1\left(x_{11},x_{12},...,x_{1i_1}\right)$,

$f_2=f_2\left(x_{21},x_{22},...,x_{2i_2}\right)$,

....

$f_k=f_k\left(x_{k1},x_{k2},...,x_{ki_k}\right)$– булеві функції, всі самодвоїсті.

$$\Phi\left(y_1,y_2,...,y_l\right)=f_0\left(\ f_1\left(x_{11},x_{12},...,x_{1i_1}\right),\ f_2\left(x_{21},x_{22},...,x_{2i_2}\right),\ldots,\ f_k\left(x_{k1},x_{k2},...,x_{ki_k}\right)\right)$$

– елементарна суперпозиція функцій $f_0,f_1,f_2,...,f_k$.

За теоремою двоїстості

$$\Phi^*\left(y_1,y_2,...,y_l\right)=f_0^*\left(\ f_1^*\left(x_{11},x_{12},...,x_{1i_1}\right),f_2^*\left(x_{21},x_{22},...,x_{2i_2}\right),\ldots,\right.$$
$$\left.f_k^*\left(x_{k1},x_{k2},...,x_{ki_k}\right)\right)=f_0\left(\ f_1\left(x_{11},x_{12},...,x_{1i_1}\right),f_2\left(x_{21},x_{22},...,x_{2i_2}\right),\ldots,\right.$$
$$\left.f_k\left(x_{k1},x_{k2},...,x_{ki_k}\right)\right)=\Phi\left(y_1,y_2,...,y_l\right).$$

4) M **– клас монотонних функцій**.

На множині наборів однакової довжини введемо **бінарне відношення передування** $\triangleleft$.

Нехай $\alpha=\left(\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\right)$ та $\beta=\left(\beta_1\beta_2...\beta_n\right)$.

$$\alpha\triangleleft\beta\Leftrightarrow\alpha_1\le\beta_1,\alpha_2\le\beta_2,...,\alpha_n\le\beta_n.$$

Приклад. Розглянемо набори довжини $n=2$ (рис.52).

x	y
0	0
0	1
1	0
1	1

Рисунок 52 – Набори довжини $n=2$

$\left(00\right)\triangleleft\left(01\right),\left(00\right)\triangleleft\left(10\right),\left(00\right)\triangleleft\left(11\right);$

$(01)\not\lhd(10)$ (не знаходиться у відношенні передування), $(01)\lhd(11)$; $(10)\lhd(11)$.

Приклад. Розглянемо набори довжини $n=3$ (рис.53).

x	y	z
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Рисунок 53 – Набори довжини $n=3$

Набір (000) знаходиться у відношенні передування з усіма наборами, що розташовані нижче.

$(001)\lhd(011),(001)\lhd(101),(001)\lhd(111)$;

$(010)\lhd(011),(010)\lhd(110),(010)\lhd(111)$;

$(011)\lhd(111)$;

$(100)\lhd(101),(100)\lhd(110),(100)\lhd(111)$;

$(101)\lhd(111)$;

$(110)\lhd(111)$.

Означення. Булева функція f називається **монотонною**, якщо завжди з того, що $\alpha\lhd\beta$, маємо $f(\alpha)\le f(\beta)$.

$f(x)=x$ (тотожність), $f\in M$, тому що $f=(01)$.

$f(x)=\overline{x}$ (заперечення), $f\notin M$, тому що $f=(10)$.

$f(x)=0$ (нуль), $f\in M$, тому що $f=(00...0)$.

$f(x)=1$ (одиниця), $f\in M$, тому що $f=(11...1)$.

$f(x,y)=x\,\&\,y$ (кон'юнкція), $f\in M$, тому що $f=(0001)$.

$f(x,y)=x\vee y$ (диз'юнкція), $f\in M$, тому що $f=(0111)$.

$f(x,y) = x \oplus y$ (виключне або), $f \notin M$, тому що $(01) \lhd (11), f(01) > f(11)$ (рис.54).

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Рисунок 54 – Таблиця істинності функції виключне або

$f(x,y) = x \to y$ (імплікація), $f \notin M$, тому що
$(00) \lhd (10), f(00) > f(10)$ (рис.55).

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Рисунок 55 – Таблиця істинності функції імплікація

$f(x,y) = x \equiv y$ (еквіваленція), $f \notin M$, тому що
$(00) \lhd (01), f(00) > f(01)$(рис.56).

x	y	$x \equiv y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Рисунок 56 – Таблиця істинності функції еквіваленція

$f(x,y) = x|y$ (штрих Шеффера), $f \notin M$, тому що $f = (1110)$.

$f(x,y)=x\downarrow y$ (стрілка Пірса), $f\notin M$, тому що $f=(1000)$.

Інформацію щодо монотонності елементарних булевих функцій зібрано у таблицю, що подана на рис.57.

$f\in M$	$0,1,x,\&,\vee$
$f\notin M$	$\overline{x},\oplus,\rightarrow,\equiv,\mid,\downarrow$

Рисунок 57 – Приналежність булевих функцій класу M

Покажемо, що M – замкнений клас. Нехай $f_0,f_1,f_2,...,f_k\in M$. Покажемо, що елементарна суперпозиція цих функцій

$\Phi(y_1,y_2,...,y_l)=f_0(\ f_1(x_{11},x_{12},...,x_{1i_1}),\ f_2(x_{21},x_{22},...,x_{2i_2}),\dots,\ f_k(x_{k1},x_{k2},...,x_{ki_k}))$

є монотонною функцією.

Нехай $\alpha=(\alpha_1\alpha_2...\alpha_l)$ та $\beta=(\beta_1\beta_2...\beta_l)$, $\alpha\lhd\beta$.

Набору $\alpha=(\alpha_1\alpha_2...\alpha_l)$ довжини l відповідають піднабори значень змінних $\alpha^{(1)},\alpha^{(2)},...,\alpha^{(k)}$ функцій $f_1,f_2,...,f_k$.

Набору $\beta=(\beta_1\beta_2...\beta_l)$ довжини l відповідають піднабори значень змінних $\beta^{(1)},\beta^{(2)},...,\beta^{(k)}$ функцій $f_1,f_2,...,f_k$.

З того, що $\alpha\lhd\beta$ випливає, що $\alpha^{(1)}\lhd\beta^{(1)},\ \alpha^{(2)}\lhd\beta^{(2)},\dots,\ \alpha^{(k)}\lhd\beta^{(k)}$.

Функції $f_1,f_2,...,f_k$ монотонні, тому

$$f_1(\alpha^{(1)})\le f_1(\beta^{(1)}),$$

$$f_2(\alpha^{(2)})\le f_2(\beta^{(2)}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$f_k(\alpha^{(k)})\le f_k(\beta^{(k)}).$$

Функція f_0 монотонна, тому

$$\Phi(\alpha)=f_0\left(f_1(\alpha^{(1)}),f_2(\alpha^{(2)}),...,f_k(\alpha^{(k)})\right)\le$$

$$\le f_0\left(f_1(\beta^{(1)}),f_2(\beta^{(2)}),...,f_k(\beta^{(k)})\right)=\Phi(\beta).$$

Звідси Φ монотонна $\Rightarrow$ клас M замкнений ($M=[M]$).

5) L **– клас лінійних функцій**.

$$f\in L\Leftrightarrow f\text{ – лінійна.}$$

Означення. Булева функція $f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ називається **лінійною**, якщо її поліном Жегалкіна містить лише лінійні доданки:

$$f\left(x_1,x_2,...,x_n\right)= a_0 \oplus a_1x_1 \oplus ... \oplus a_nx_n .$$

$f\left(x\right)=x$ (тотожність), $f \in L$, тому що $f\left(x\right)=0\oplus x$.

$f\left(x\right)=\overline{x}$ (заперечення), $f \in L$, тому що $f\left(x\right)=\overline{x}=x\oplus 1$.

$f\left(x\right)=0$ (нуль), $f \in L$, тому що $f\left(x\right)=0\oplus 0\cdot x$.

$f\left(x\right)=1$ (одиниця), $f \in L$, тому що $f\left(x\right)=1\oplus 0\cdot x$.

$f\left(x,y\right)=x\,\&\,y$ (кон'юнкція), $f \notin L$, тому що

$f\left(x,y\right)=xy=0\oplus 0\cdot x\oplus 0\cdot y\oplus x\cdot y$.

$f\left(x,y\right)=x\vee y$ (диз'юнкція), $f \notin L$, тому що

$f\left(x,y\right)=x\vee y=x\oplus y\oplus xy$.

$f\left(x,y\right)=x\oplus y$ (виключне або), $f \in L$, тому що

$f\left(x,y\right)=0\oplus 1\cdot x\oplus 1\cdot y$.

$f\left(x,y\right)=x\to y$ (імплікація), $f \notin L$, тому що

$f\left(x,y\right)=x\to y=1\oplus x\oplus xy$.

$f\left(x,y\right)=x\equiv y$ (еквіваленція), $f \in L$, тому що

$f\left(x,y\right)=x\equiv y=1\oplus x\oplus y$.

$f\left(x,y\right)=x|y$ (штрих Шеффера), $f \notin L$, тому що

$f\left(x,y\right)=x|y=\overline{xy}=xy\oplus 1$.

$f\left(x,y\right)=x\downarrow y$ (стрілка Пірса), $f \notin L$, тому що

$f\left(x,y\right)=x\downarrow y=\overline{x\vee y}==x\oplus y\oplus xy\oplus 1$.

Інформацію щодо лінійності елементарних булевих функцій зібрано у таблицю, що подана на рис.58.

$f \in L$	$0,1,x,\overline{x},\oplus,\equiv$
$f \notin L$	$\&,\vee,\to,\vert,\downarrow$

Рисунок 58 – Приналежність булевих функцій класу L

Суперпозиція лінійних функцій є лінійною функцією. Отже, $L=[L]$, тобто клас L замкнений.

Теорема Поста (теорема про функціональну повноту).

Система функцій D є повною тоді й тільки тоді, коли вона не входить у жоден із основних замкнених класів T_0, T_1, S, M, L.

Іншими словами:

Система функцій D є повною тоді й тільки тоді, коли в D існують функції f_0, f_1, f_S, f_M, f_L (можливо, деякі, і навіть всі, збігаються) такі, що $f_0 \notin T_0$, $f_1 \notin T_1$, $f_S \notin S$, $f_M \notin M$, $f_L \notin L$.

Для перевірки системи функцій $D = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_l\}$ на повноту будується таблиця, рядки якої відповідають функціям системи, а стовпці – основним замкненим класам. Таку таблицю показано на рис.59.

	T_0	T_1	S	M	L
φ_1					
φ_2					
…					
φ_l					

Рисунок 59 – Таблиця для перевірки системи функцій на повноту

На перетині рядка і стовпця ставимо «+», якщо функція входить до відповідного класу і ставимо «–», якщо не входить. Якщо кожний стовпець містить хоча би один «–», то система D повна. Інакше система D не є повною.

Приклад. Дослідити на повноту систему функцій $D = \{0, 1, \overline{x}, \rightarrow\}$.

Розв’язання. Накреслимо таблицю, таку, як на рис.59, та заповнимо її. Заповнену таблицю подано на рис.60.

	T_0	T_1	S	M	L
0	+	–	–	+	+
1	–	+	–	+	+
$\overline{x}$	–	–	+	–	+
$\rightarrow$	–	+	–	–	–

Рисунок 60 – Перевірка системи функцій на повноту

Ми бачимо, що в кожному стовпчику таблиці міститься щонайменше один «–». За теоремою Поста це означає, що $D-$ повна система функцій. Якщо уважно подивитися на таблицю (рис.60), то можна зробити висновок, що повними також є системи $\{\to,\bar{x}\}$ та $\{\to,0\}$.

ЛЕКЦІЯ 9

ТЕМА: Основні поняття теорії графів

План лекції

Означення графа. Основні поняття, приклади. Способи подання графів: аналітичний, графічний, матричний (поняття, приклади).

Список термінів

1. **Граф**
2. **Сім'я**
3. **Вершини графа**
4. **Ребра графа**
5. **Порядок графа**
6. **Суміжні ребра**
7. **Суміжні вершини**
8. **Кінцеві вершини ребра**
9. **Інцидентні вершина та ребро**
10. **Петля**
11. **Кратні (паралельні) ребра**
12. **Простий граф**
13. **Мультиграф**
14. **Псевдограф**
15. **Скінченний граф**
16. **Орієнтований граф (орграф)**
17. **Неорієнтований граф**
18. **Планарний граф**
19. **Матриця суміжності**
20. **Матриця інцидентності**

Основні поняття теорії графів

Означення. **Графом** G будемо називати пару $\{V,R\}$, $G=\{V,R\}$, де V – довільна скінченна множина, а сім'ю R складають невпорядковані пари елементів множини V.

У **множині** всі елементи різні, а в **сім'ї** елементи можуть повторюватися.

Елементи множини V називають **вершинами** графа G, елементи сім'ї R називають **ребрами** графа G. Кількість вершин називають **порядком графа**.

Приклад. Нехай задано граф $G=\{V,R\}$. Множина вершин $V=\{a,b,c,d\}$, множина ребер $R=\{(a,b),(b,c),(c,d),(a,d),(a,c)\}$. Порядок графа G дорівнює $n=4$.

Невпорядкованість пар вершин означає, що (i,j) та (j,i) одне й те саме ребро.

Ребра, що мають спільну вершину, називають **суміжними ребрами**.

Приклад. Ребра (a,b) та (b,c) суміжні.

Дві вершини графа, що утворюють ребро, називають **суміжними вершинами**.

Приклад. У графі $G=\{V,R\}$, $V=\{a,b,c,d\}$, $R=\{(a,b),(b,c),(c,d),(a,d),(a,c),(a,b)\}$ маємо: вершини a та b суміжні, вершини b та d несуміжні.

Для ребра (i,j) вершини i та j називають **кінцевими вершинами** цього ребра.

Вершина та ребро називають **інцидентними**, якщо ця вершина – одна з кінцевих вершин цього ребра.

Приклад. Ребро (a,b). a та b є кінцевими вершинами цього ребра. Вершина a та ребро (a,b) інцидентні. Вершина b та ребро (a,b) інцидентні. Вершина c та ребро (a,b) неінцидентні.

Ребра виду (i,i) називають **петлями**.

Два ребра, що мають однакові кінцеві вершини, називають **кратними (паралельними)**.

Означення. Граф $G=\{V,R\}$ називають **простим графом**, якщо в ньому відсутні кратні ребра та петлі.

Приклад. Нехай задано граф $G=\{V,R\}$. Множина вершин $V=\{a,b,c,d\}$, множина ребер $R=\{(a,b),(b,c),(c,d),(a,d),(a,c)\}$. Цей граф є простим. Граф $G_1=\{V,R_1\}$, $R_1=\{(a,b),(b,c),(c,d),(a,b),(a,c)\}$ не є простим.

Граф, в якому є хоча б два паралельні ребра називають **мультиграфом**.

Граф, в якому є хоча б одна петля називають **псевдографом**.

Якщо множина V скінченна, то граф $G=\{V,R\}$ називають **скінченним**.

Граф $G=\{V,R\}$ називають **орієнтованим** (**орграфом**), якщо сім'я R складається з упорядкованих пар. Ми будемо розглядати скінченні **неорієнтовані** графи.

Способи подання графа

1) **Аналітичний спосіб**. Переліком задаються множина V, множина (сім'я) R.

Приклад. Граф $G=\{\ V\ \}$, множина вершин $V=\{a,b,c,d\}$, множина $R=\{(a,b),(b,c),(c,d),(a,d),(a,c)\}$.

2) **Графічний спосіб**. Вершини зображуються точками, ребра – відрізками або дугами.

Взаємне розташування, форма та довжина ребер значення не мають, головне, що вони з'єднують дві вершини.

Приклад. На рис.61 графічно подано граф четвертого порядку.

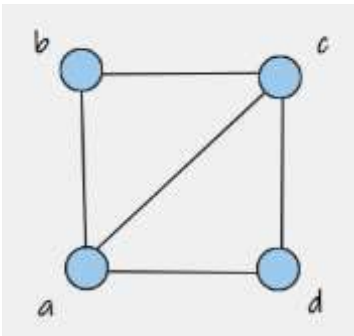


Рисунок 61 – Графічний спосіб подання графу

Граф, який можна подати на площині так, щоб усі його ребра були зображені неперетинними дугами, називається **планарним**. Граф на рис.61 є планарним.

3) **Матричний спосіб**.

А) **Матриця суміжності**. $G=\{V,R\}$, $V=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, отже, порядок графа дорівнює n. Матриця суміжності – це матриця $A_{n\times n}=(a_{ij})$, де a_{ij}

дорівнює числу ребер, що сполучають вершини x_i та x_j. Матриця симетрична: $a_{ij} = a_{ji}$. Якщо відсутні петлі, то $a_{ii} = 0$, тобто на головній діагоналі матриці лише нулі. Якщо немає кратних ребер, то елементами матриці є «0» та «1». Якщо граф простий, то на головній діагоналі матриці суміжності стоять нулі, а всі інші елементи – нулі та одиниці.

Приклад. Граф, що подано на рис.61 подамо матрицею суміжності. Це буде матриця 4×4 з нулів та одиниць. Зверху та зліва напишемо назви вершин.

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рисунок 62 – Матриця суміжності простого графа

Б) **Матриця інцидентності**. $G = \{V, R\}$, $V = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $R = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$, отже, n вершин та m ребер. Матриця інцидентності – це матриця $B_{n \times m} = (b_{ij})$, де

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{якщо вершина } x_i \textit{ інцидентна ребру } v_j, \\ 0, & \textit{якщо вершина } x_i \textit{ неінцидентна ребру } v_j. \end{cases}$$

Приклад. Нехай задано граф (рис.63).

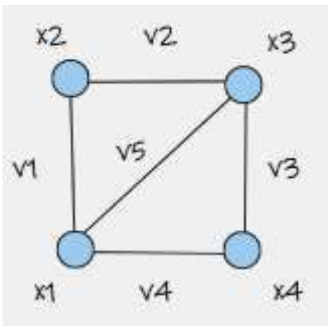


Рисунок 63 – Граф порядку 4, що має 5 ребер

Для цього графу побудуємо матрицю інцидентності. Це буде матриця 4×5 з нулів та одиниць. Зліва напишемо назви вершин, зверху – назви ребер.

$$\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Рисунок 64 – Матриця інцидентності

У кожному стовпчику матриці інцидентності дві одиниці (тому що кожне ребро інцидентне двом вершинам).

ЛЕКЦІЯ 10

ТЕМА: Степінь вершини. Маршрути в графах, зв'язність

План лекції

Повний граф порядку *n*. Степінь вершини, лема Ейлера. Формула для числа ребер повного графа. Ізоморфізм графів. Підграф графа, остовний підграф.

Маршрут у графі. Довжина, початок, кінець маршруту. Способи запису маршрутів. Види маршрутів. Ланцюги та цикли. Компоненти зв'язності графа. Зв'язний граф.

Список термінів та позначень

1. **Повний граф**
2. **K_n**
3. **Порожній граф**
4. **Нуль-граф**
5. **Степінь вершини**
6. ***deg* u**
7. **ρ(u)**
8. **Ізольована вершина**
9. **Висяча вершина**
10. **Ізоморфне відображення**
11. **Ізоморфні графи**
12. **Підграф**
13. **Остовний підграф**
14. **Кістяковий підграф**
15. **Маршрут**

16. Довжина маршруту
17. Початок маршруту
18. Кінець маршруту
19. Тривіальний маршрут
20. Замкнений маршрут
21. Ланцюг
22. Простий ланцюг
23. Цикл
24. Простий цикл
25. Компонента зв’язності
26. Зв’язний граф

Степінь вершини

Граф $G=\{V,R\}$ називається **повним**, якщо будь-яка пара різних вершин графа утворює ребро. Повний граф порядку n позначається K_n. Графи K_1,K_2,K_3,K_4 зображені на рис.65, 66.

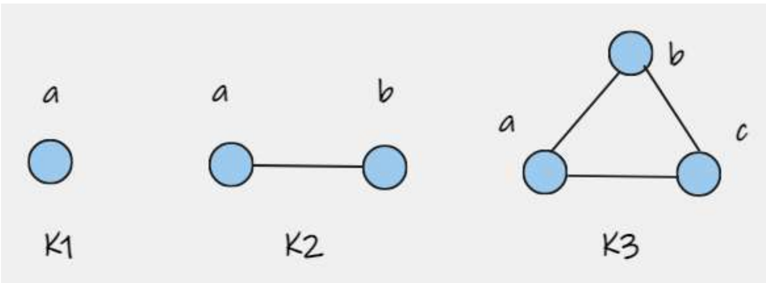


Рисунок 65 – Повні графи K_1,K_2,K_3

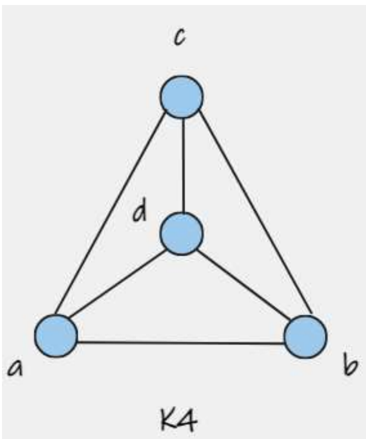


Рисунок 66 – Повний граф K_4

Приклад. На рис.67 зображено повний граф. Його порядок 4. Це граф K_4. Рис.66 та рис.67 – це різні зображення одного графа.

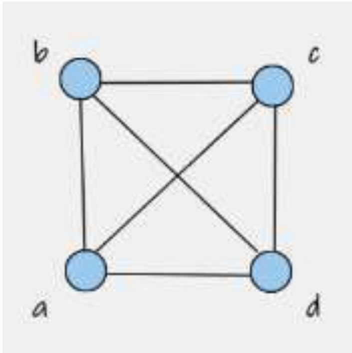


Рисунок 67 – Повний граф K_4

Граф, що не має ребер, називається **порожнім** або **нуль-графом**.

Приклад. На рис.68 подано нуль-граф. Це граф порядку 3.

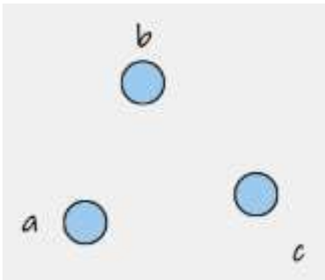


Рисунок 68 – Нуль-граф

Степенем вершини називається кількість ребер, інцидентних цій вершині. Степінь вершини u позначають $deg\,u$, $\rho(u)$.

Приклад. Задано граф порядку 4 (рис.69).

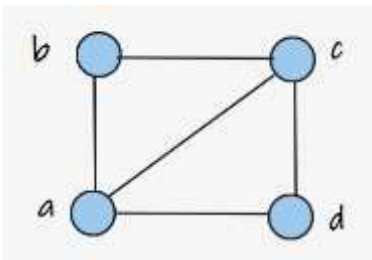


Рисунок 69 – Граф порядку 4

Для цього графу $deg\ a = 3$, $deg\ b = 2$, $deg\ c = 3$, $deg\ d = 2$.

Вершину u таку, що $deg\ u = 0$, називають **ізольованою**.

Вершину u таку, що $deg\ u = 1$, називають **висячою**.

Лема Ейлера. Сума степенів вершин графа є число парне і дорівнює подвоєній кількості його ребер q:

$$\sum_{u \in V} deg\ u = 2q .$$

Доведення: кожне ребро інцидентне двом вершинам, отже, підраховується двічі.

Приклад. Для графа, поданого на рис.69, перевіримо виконання формули з леми Ейлера.

$deg\ a + deg\ b + deg\ c + deg\ d$ = 3+2+3+2=10, $q = 5$, $\sum_{u \in V} deg\ u = 10 = 2 \cdot 5 = 2q$.

Нехай $G = \{V, R\}$ – повний граф порядку n, тобто K_n. Тоді для кожної вершини $u \in V$ справедливо $deg\ u = n - 1$. Маємо

$$\sum_{u \in V} deg\ u = \sum_{u \in V} (n-1) = n(n-1) = 2q .$$

Отже, для повного графа число ребер визначається формулою

$$q = \frac{n(n-1)}{2} .$$

Нехай $G = \{V, R\}$, $G_1 = \{V_1, R_1\}$ – два графи.

Означення. Бієктивне відображення $f : V \to V_1$ називається **ізоморфізмом графів** G, G_1, якщо вершини u, v графа G суміжні тоді й тільки тоді, коли їх образи $f(u), f(v)$ – суміжні вершини графа G_1.

Якщо такий ізоморфізм f існує, то графи G та G_1 називаються **ізоморфними**. Пишуть: $G \cong G_1$.

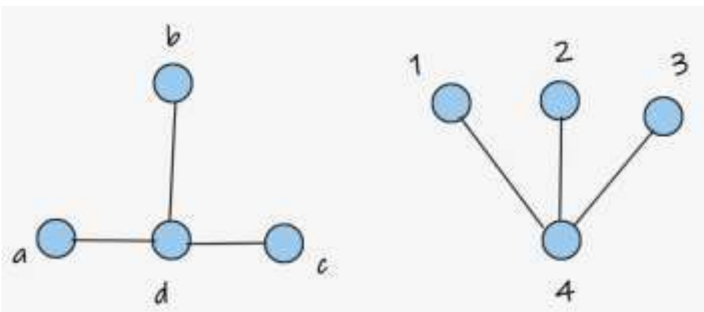


Рисунок 70 – Ізоморфні графи

Приклад. Нехай задані два графи $G=\{\{1,2,3,4\},\{(1,4),(2,4),(3,4)\}\}$, $G_1=\{\{a,b,c,d\},\{(a,d),(b,d),(c,d)\}\}$ (рис.70). Ізоморфізмом тут є таке відображення $f:\ f(1)=a, f(2)=b, f(3)=c, f(4)=d$.

Графи з різним числом вершин не можуть бути ізоморфними.

Графи з різним числом ребер не можуть бути ізоморфними.

Ізоморфні графи – це різні реалізації (різні зображення) одного й того ж графа.

Нехай $G=\{V,R\}$, $G_1=\{V_1,R_1\}$– два графи. Граф G_1 називається **підграфом** графа G (пишуть $G_1 \subseteq G$), якщо $V_1 \subseteq V$, $R_1 \subseteq R$.

Приклад. На рис.71 зображено граф G та його підграф G_1.

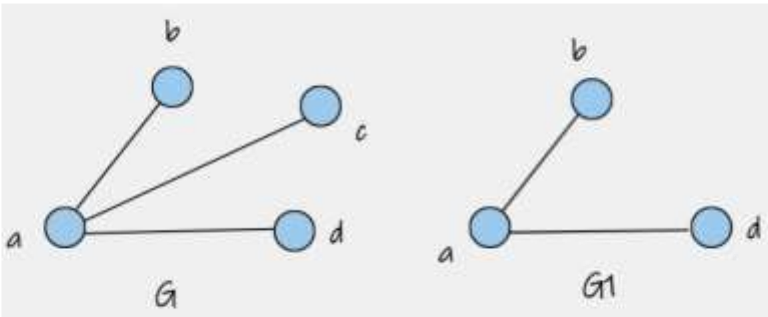


Рисунок 71 – Граф та його підграф

Підграф $G_1 \subseteq G$ називається **кістяковим** (**остовним**), якщо множина вершин V_1 збігається з множиною вершин V.

Приклад. На рис.72 зображено граф G та його остовний підграф G_1.

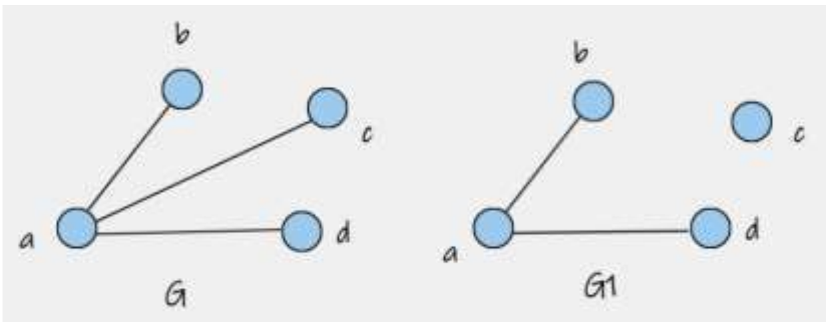


Рисунок 72 – Граф та його остовний підграф

Маршрути в графах, зв'язність

Нехай $G=\{V,R\}$– граф. **Маршрутом** називається послідовність $v_1x_1v_2x_2...x_nv_{n+1}$, у якій чергуються вершини v_i графа та його ребра x_i, причому кожне ребро x_i утворюють вершини v_i,v_{i+1}.

Довжина маршруту – це кількість n його ребер (кожне ребро підраховують стільки разів, скільки воно входить у послідовність). Вершина v_1– **початок маршруту**, вершина v_{n+1} – **кінець маршруту**.

Приклад. На рис.73 подано граф $G=\{V,R\}$.

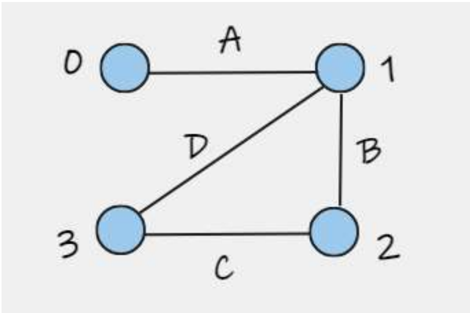


Рисунок 73 – Граф $G=\{V,R\}$

$V=\{0,1,2,3\}$, $R=\{A,B,C,D\}$. Задано маршрут 0A1D3C2C3. Довжина цього маршруту $n=4$. Початок маршруту – 0, кінець маршруту – 3.

Маршрут можна задавати послідовністю його ребер. Так, у нашому прикладі маємо маршрут ADCC.

Якщо у графі немає кратних ребер, то маршрут можна задавати послідовністю його вершин. Так, у нашому прикладі маємо маршрут 01323.

Тривіальний маршрут складається тільки з однієї вершини, його довжина дорівнює нулю.

Замкнений маршрут – це маршрут, у якому $v_1=v_{n+1}$, тобто початкова вершина збігається з кінцевою.

Ланцюг – це маршрут, у якого всі ребра різні.

Простий ланцюг – це ланцюг, у якого всі вершини різні.

Приклад. Для графа, що зображено на рис.73, маршрут 0A1D3C2B1 – це ланцюг. Маршрут 0A1D3C2 – це простий ланцюг.

Цикл – будь-який замкнений ланцюг.

Простий цикл – це цикл, у якого всі вершини (крім початкової та кінцевої) різні.

Приклад. На рис.74 подано граф, в якому існують цикли.

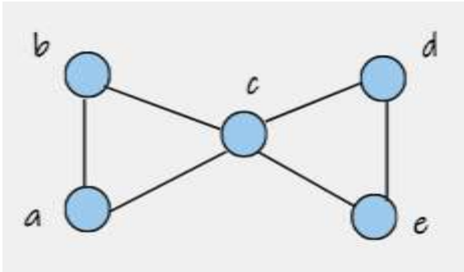


Рисунок 74 – Граф з циклами

Маршрут *abcdeca* – це цикл. Маршрут *abca* – це простий цикл.

На множині V вершин графа $G=\{V,R\}$ введемо відношення еквівалентності: будемо вважати, що вершини $a,b\in V$ **еквівалентні** ($a \sim b$), якщо вершину *a* можна сполучити маршрутом з вершиною *b* (завдання: довести, що це відношення еквівалентності).

Множина V розпадається на класи еквівалентності – попарно неперетинні множини $V_1,V_2,...,V_m$, такі, що довільна пара вершин $a,b\in V_i$ еквівалентні, і довільна пара вершин $a\in V_i$, $b\in V_j$ нееквівалентні.

Якщо *a* та *b* суміжні, то вони належать одному класу еквівалентності. Звідси випливає, що множина ребер *R* також розпадається на попарно неперетинні множини $R_1,R_2,...,R_m$. Причому ребра множини R_i можуть бути інцидентними тільки вершинам з V_i. Це означає, що $\{V_i,R_i\}$ – підграф графа G.

Підграфи $G_1=\{V_1,R_1\}$, $G_2=\{V_2,R_2\}$, …, $G_m=\{V_m,R_m\}$ називають **компонентами зв’язності** графа G.

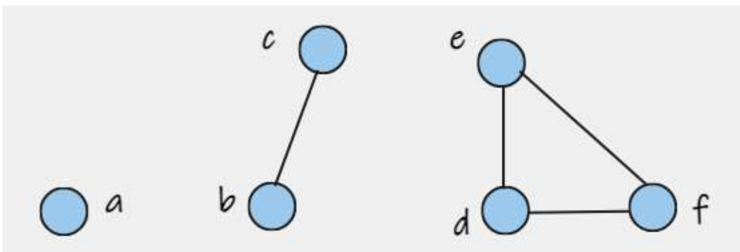


Рисунок 75 – Граф, у якого три компоненти зв’язності

Приклад. Граф G з трьома компонентами зв’язності (рис.75).

Опишемо ці компоненти. $G_1 = \{V_1, R_1\}$, $V_1 = \{a\}$, $R_1 = \varnothing$.

$G_2 = \{V_2, R_2\}$, $V_2 = \{b, c\}$, $R_2 = \{(b, c)\}$.

$G_3 = \{V_3, R_3\}$, $V_3 = \{d, e, f\}$, $R_3 = \{(d, e), (e, f), (d, f)\}$.

У випадку, коли всі вершини графа G еквівалентні між собою, граф G має лише одну компоненту зв’язності (яка збігається з графом G). Такий граф називають **зв’язним**.

Можно сказати так: граф **зв’язний**, якщо з будь-якої його вершини можна прийти у будь-яку його вершину за деяким маршрутом.

ЛЕКЦІЯ 11

ТЕМА: Операції над графами. Дерева, ліс.

План лекції

Операція вилучення ребра. Операція вилучення вершини. Операція введення ребра. Операція введення вершини в ребро. Ототожнення (злиття) вершин. Операція стягування ребра. Операція доповнення графа. Операція об’єднання графів. Операція перерізу графів. Операція добутку графів.

Дерево, ліс. Теорема про дерево. Еквівалентність тверджень цієї теореми.

Список термінів

1. Доповнення графа

2. Дерево

3. Ациклічний граф

4. Ліс

Операції над графами

Унарні операції (ті, що виконуються над одним графом).

1. **Операція вилучення ребра**. Нехай $G = \{V, R\}$ – граф, $r \in R$ – деяке його ребро. Говорять, що граф $G_1 = G \setminus \{r\}$ одержано з графа G внаслідок операції вилучення ребра r, якщо $G_1 = \{V, R \setminus \{r\}\}$. Отже, кінці ребра r не вилучаються з множини V.

Можна показати, що для довільних ребер r, r_1 графа G

$$(G - r) - r_1 = (G - r_1) - r.$$

Отже, якщо виконуються підряд кілька операцій вилучення ребра, то результат не залежить від порядку вилучення ребер з графа.

Приклад. Нехай задано граф G (рис.76).

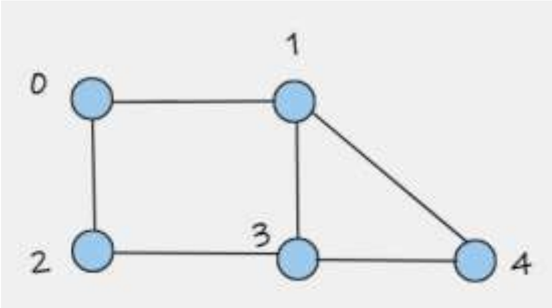


Рисунок 76 – Граф G

Виконаємо над графом G операцію вилучення ребра (1,4). Результат операції подано на рис.77.

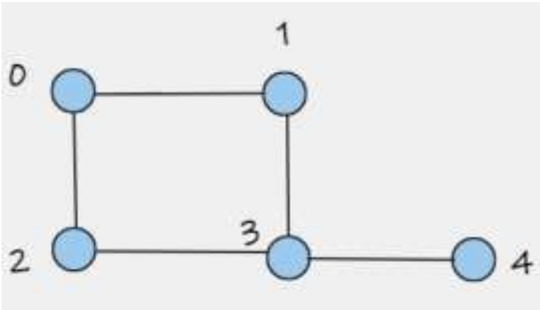


Рисунок 77 – Граф $G \setminus (1,4)$

Виконаємо над графом $G \setminus (1,4)$ операцію вилучення ребра (0,2). Результат операції подано на рис.78.

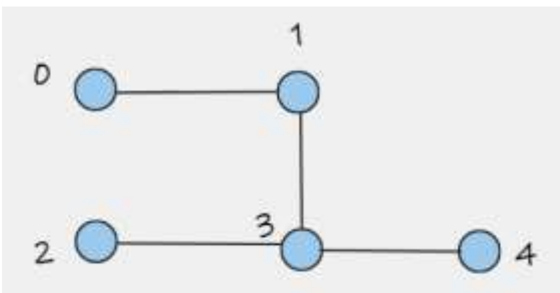


Рисунок 78 – Граф $(G \setminus (1,4)) \setminus (0,2)$

2. **Операція вилучення вершини**. Нехай $G=\{V,R\}$ – граф, $v\in V$ – деяка його вершина. Говорять, що граф $G_1=G\setminus\{v\}$ одержано з графа G внаслідок операції вилучення вершини v, якщо вершина v вилучена з множини V, а з множини R вилучені всі ребра, інцидентні з вершиною v.

Можна показати, що для довільних вершин v,v_1 графа G

$$(G-v)-v_1=(G-v_1)-v.$$

Отже, якщо виконуються підряд кілька операцій вилучення вершини, то результат не залежить від порядку вилучення вершин з графа.

Приклад. Нехай задано граф G (рис.76). Виконаємо над графом G операцію вилучення вершини 3. Результат операції подано на рис.79.

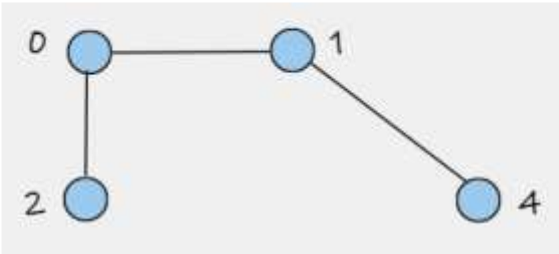


Рисунок 79 – Граф $G\setminus\{3\}$

Операції 1 та 2 – це операції, за допомогою яких можна з початкового графа одержувати графи з меншим числом ребер і вершин. Існують інші операції, які дають можливість будувати з початкових графів нові графи з більшим числом ребер і вершин.

3. **Операція введення ребра**. Нехай $G=\{V,R\}$ – граф, $u,v\in V$ – вершини графа такі, що ребро $(u,v)\notin R$. Граф $G_1=G+(u,v)$ отримано з графа G шляхом введення ребра (u,v). Це такий граф, що $G_1=\{V,R\cup\{(u,v)\}\}$.

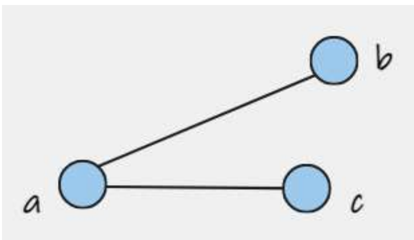


Рисунок 80 – Граф G

Можна показати, що для довільних ребер r, r_1 графа G

$$\left(G+r\right)+r_1=\left(G+r_1\right)+r.$$

Приклад. Нехай задано граф G (рис.80). Виконаємо над графом G операцію введення ребра $\left(b,c\right)$. Результат операції подано на рис.81.

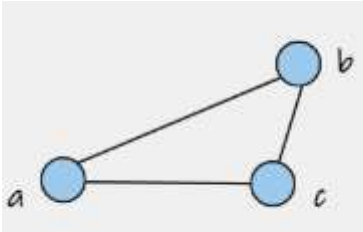


Рисунок 81 – Граф $G_1=G+\left(b,c\right)$

4. **Операція введення вершини в ребро**. Нехай $G=\left\{V,R\right\}$ – граф, $\left(u,v\right)\in R$ – деяке його ребро, $w\in V$ – вершина графа, така, що w несуміжна вершинам u,v або $w\notin V$. Введенням вершини w у ребро $\left(u,v\right)$ називається операція, внаслідок якої одержуємо два ребра $\left(u,w\right)$ та $\left(v,w\right)$, а ребро $\left(u,v\right)$ при цьому вилучається з графа G.

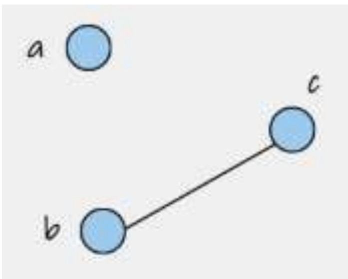


Рисунок 82 – Граф G

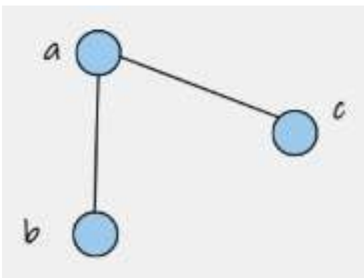


Рисунок 83 – Введення вершини в ребро

Приклад. Нехай задано граф G (рис.82). Виконаємо над графом G операцію введення вершини a у ребро (b,c). Результат операції подано на рис.83.

5. **Ототожнення (злиття) вершин**. Нехай $G=\{V,R\}$ – граф, $u,v\in V$ – вершини графа. Нехай суміжні з u вершини: $См(u)=\{u_1,...,u_k\}$, суміжні з v вершини: $См(v)=\{v_1,...,v_m\}$. Результат операції злиття вершин u та v:

$$G_1=G-u-v+w+\{(w,u_i)\}+\{(w,v_j)\}.$$

Приклад 1. Нехай задано граф G (рис.84).

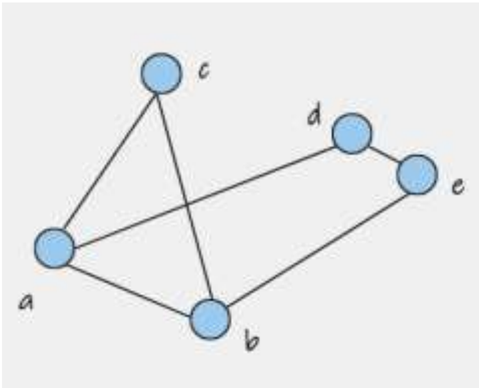


Рисунок 84 – Граф G

Виконаємо над графом G операцію ототожнення вершин a та b (суміжні вершини). Граф G_1 – результат цієї операції подано на рис.85.

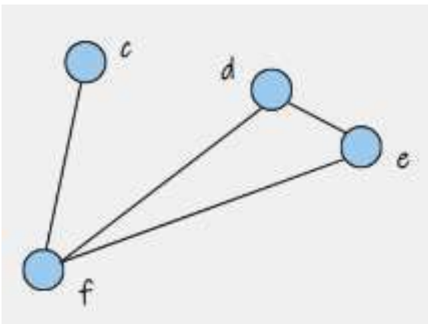


Рисунок 85 – Граф G_1

Приклад 2. Нехай задано граф G (рис.84). Виконаємо над графом G операцію ототожнення вершин c та d (несуміжні вершини). Граф G_2 – результат цієї операції подано на рис.86.

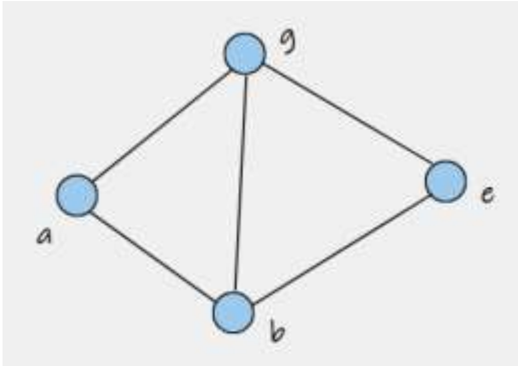


Рисунок 86 – Граф G_2

6. **Операція стягування ребра**. Операція стягування ребра (u,v) в графі $G=\{V,R\}$ означає ототожнення вершин u та v.

Приклад. Нехай задано граф G (рис.87).

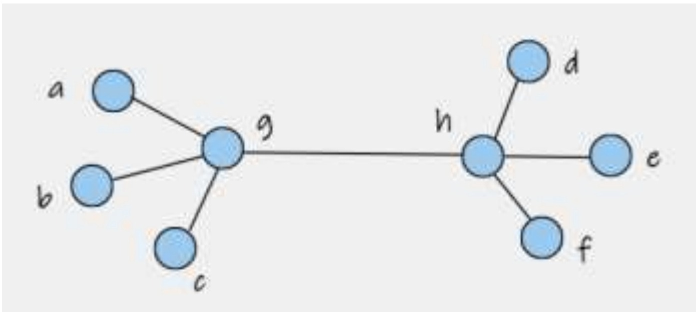


Рисунок 87 – Граф G

Виконаємо над графом G операцію стягування ребра (g,h). Граф G_1 – результат цієї операції, подано на рис.88.

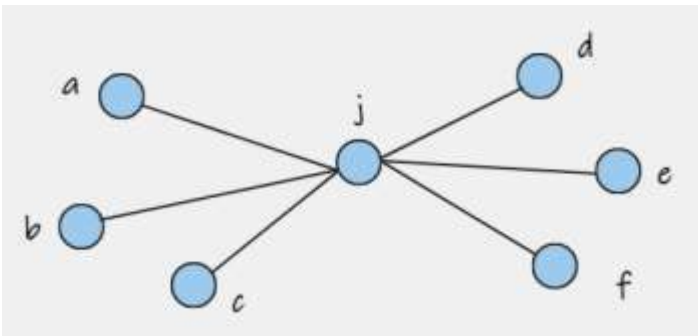


Рисунок 88 – Граф G_1

7. **Операція доповнення графа**. Нехай $G=\{V,R\}$ – граф. **Доповненням графа** G називається граф $\bar{G}$ з множиною вершин V, в якому дві вершини суміжні тоді й тільки тоді, коли вони не суміжні в графі G: $\bar{G}=\{V,\bar{R}\}$, $\bar{R}=\{(i,j):(i,j)\notin R\}$.

Приклад. На рис.89 подано граф G та його доповнення – граф $\bar{G}$.

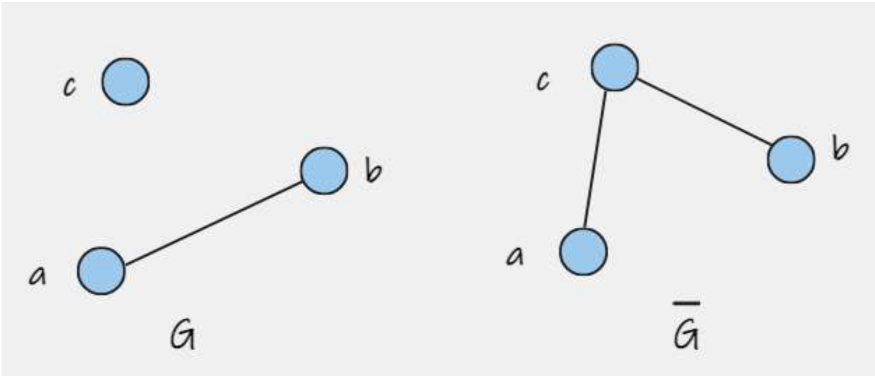


Рисунок 89 – Графи G та $\bar{G}$

Доповненням повного графа є нуль-граф, і навпаки.

Бінарні операції (ті, що виконуються над двома графами).

1) **Операція об'єднання графів**. Нехай $G_1=\{V_1,R_1\}$ і $G_2=\{V_2,R_2\}$ – два графи. Об'єднанням графів G_1 та G_2 називається граф $G=\{V_1\cup V_2,R_1\cup R_2\}$. Пишуть: $G=G_1\cup G_2$.

Об'єднання графів називається **диз'юнктивним**, якщо $V_1\cap V_2=\varnothing$.

Граф називається **зв'язним**, якщо його не можна подати у вигляді диз'юнктивного об'єднання двох підграфів, і незв'язним – у протилежному випадку. Отже, незв'язний граф можна зобразити у вигляді диз'юнктивного об'єднання зв'язних підграфів – їх називають компонентами зв'язності.

2) **Операція перерізу графів**. Нехай $G_1=\{V_1,R_1\}$ і $G_2=\{V_2,R_2\}$ – два графи. Перерізом графів G_1 та G_2 називається граф $G=\{V_1\cap V_2,R_1\cap R_2\}$. Пишуть: $G=G_1\cap G_2$.

3) **Добуток графів**. Добутком графів $G_1=\{V_1,R_1\}$ і $G_2=\{V_2,R_2\}$ називається граф $G=\{V,R\}$ (пишуть: $G=G_1\times G_2$), у якого $V=V_1\times V_2$ – декартів добуток, а R визначається таким чином: вершини (u_1,u_2) і (v_1,v_2)

суміжні в G $\Leftrightarrow$ $((u_1 = v_1$ і u_2, v_2 – суміжні в G_2) або $((u_2 = v_2$ і u_1, v_1 – суміжні в G_1).

Приклад. Нехай графи G_1 та G_2 мають такий вигляд (рис.90).

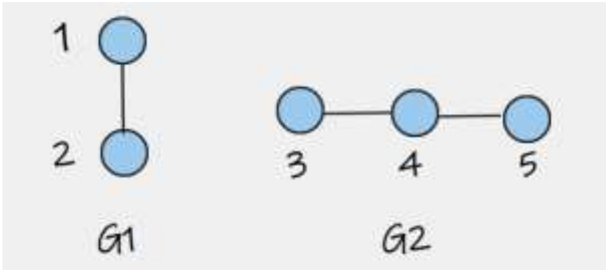


Рисунок 90 – Графи G_1 та G_2

На рис.91 зображено добуток цих графів $G = G_1 \times G_2$.

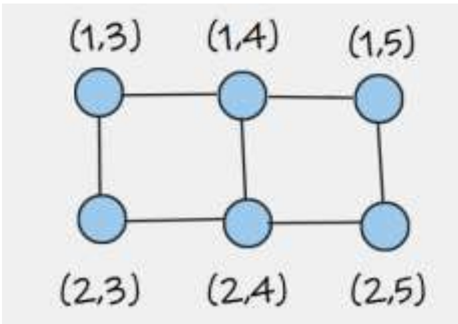


Рисунок 91 – Граф $G = G_1 \times G_2$

Дерева, ліс

Існує один простий і важливий тип графів, якому різні автори дали однакову назву – дерево. Існує кілька означень дерева, наприклад, таке:

Означення. **Дерево** – це зв’язний граф, який не містить циклів.

Граф, що не має циклів, називається **ациклічним**. Тому дерево – це ациклічний зв’язний граф.

Будь-який граф без циклів називається **лісом**. Дерева – це компоненти зв’язності ліса. Ліс – це граф, компонентами зв’язності якого є дерева.

Приклад. На рис.87 ми бачимо дерево, а на рис.92 – ліс.

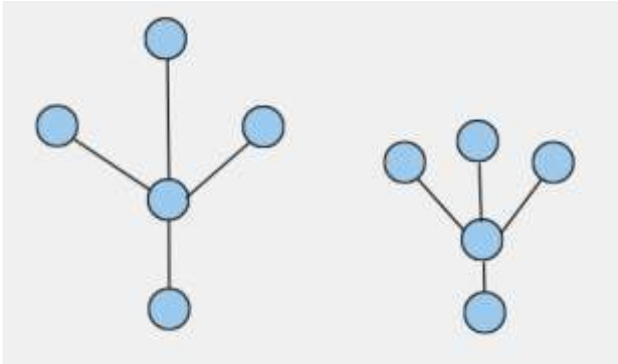


Рисунок 92 – Ліс

Нехай $G=\{V,R\}$ – граф, нехай $|V|=n$, $|R|=m$.

Теорема. Для графа $G=\{V,R\}$ наступні твердження еквівалентні.

1) G – дерево.

2) Будь-які дві вершини графа, які не збігаються, з'єднує єдиний простий ланцюг.

3) G – ациклічний граф, і число ребер на одиницю менше числа вершин: $m=n-1$.

4) G – зв'язний граф, і число ребер на одиницю менше числа вершин: $m=n-1$.

5) (без доведення) G – ациклічний граф, що має таку властивість: коли будь-яку пару його несуміжних вершин з'єднати ребром, то одержаний граф матиме рівно один цикл.

Будь-яке з тверджень 2-5 можна взяти за означення дерева.

ЛЕКЦІЯ 12

ТЕМА: Теорема про дерево. Зважені графи. Алгоритм Краскала

План лекції

Доведення теореми про дерево. Суттєві ребра (мости). Означення зваженого графа. Модель зваженого графа. Економічна та математична постановки задачі про зважений граф. Теорема Келі. Мінімальне остовне дерево. Алгоритм Краскала. Приклад застосування алгоритму Краскала.

Список термінів

1. Міст

2. Суттєве ребро

3. Зважений граф
4. Вага ребра
5. Вага графа
6. Мережа
7. Кістяковий підграф
8. Остовний підграф
9. Кістякове дерево
10. Остовне дерево
11. Мінімальне остовне дерево

Теорема про дерево

Минулої лекції ми сформулювали теорему про дерево. Доведемо цю теорему.

Схема доведення теореми: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$.

Доведемо, що $1 \Rightarrow 2$. Нехай G – дерево. Припустимо, що 2 не виконується. Тоді в графі існують дві вершини, які можна з'єднати двома різними простими ланцюгами. Це означає, що в графі існує цикл (рис.93). Існування циклу суперечить тому, що G дерево.

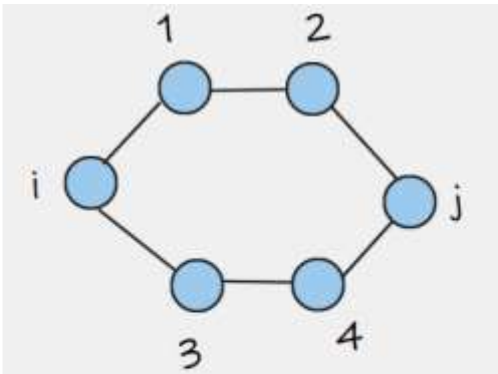


Рисунок 93 – Існування циклу

Доведемо, що $2 \Rightarrow 3$. Нехай виконується 2. Покажемо, що тоді граф має принаймні одну висячу вершину. Від супротивного: припустимо, що в графі немає висячих вершин. $2 \Rightarrow$ граф зв'язний. Маємо: граф G зв'язний і в ньому немає висячих вершин. Звідси степінь кожної вершини ≥ 2. Покажемо, що в графі можна виділити цикл. Наприклад, так: обираємо довільну вершину i_1 і рухаємося від неї по ребру до суміжної вершини i_2, від неї до суміжної вершини i_3 і т.д. Кожного разу обираємо нове ребро.

$\forall u \in V \; deg\, u \geq 2$, тому, входячи у вершину по деякому ребру, ми можемо вийти і виходимо з неї по іншому ребру. Кількість ребер у графі скінченна, тому через деяку (скінченну) кількість кроків одна з вершин зустрінеться знову $\Rightarrow$ в графі G існує цикл $\Rightarrow$ в графі G існує простий цикл $\Rightarrow$ в графі G існує пара вершин, які можна з'єднати двома різними простими ланцюгами. Суперечність з 2. Отже, у графі G є висяча вершина. Видалимо цю висячу вершину. При цьому властивість 2 не порушується. Тому новий граф також має висячу вершину. Продовжимо видалення висячих вершин, отримаємо одновершинний граф. Звідси випливає, що число ребер графа на одиницю менше числа вершин: $m = n - 1$. Видалення (додавання) висячої вершини не порушує ациклічність. Одновершинний граф ациклічний $\Rightarrow$ вихідний граф G також ациклічний.

Доведемо, що $3 \Rightarrow 4$**.** Нехай граф G ациклічний і $m = n - 1$. Треба довести, що G зв'язний. G ациклічний $\Rightarrow$ G – ліс $\Rightarrow$ компоненти зв'язності G – дерева. Нехай в графі G s компонент зв'язності (s дерев). За вже доведеним, у кожному дереві число ребер на одиницю менше числа вершин:

$$m_1 = n_1 - 1,$$
$$m_2 = n_2 - 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$m_s = n_s - 1.$$

Тоді
$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_s = n_1 - 1 + n_2 - 1 + \ldots + n_s - 1 = n_1 + n_2 + \ldots + n_s - s = n - s$. За умовою $m = n - 1$. Звідси $s = 1$. Одна компонента зв'язності $\Rightarrow$ G – зв'язний граф.

Доведемо, що $4 \Rightarrow 1$**.** Нехай граф G зв'язний і $m = n - 1$. Треба довести, що G – дерево. Отже, треба довести, що G ациклічний. Від супротивного. Припустимо, що в G існує простий цикл довжини k (рис.94). Він містить k вершин і k ребер. Тоді для довільної з $n - k$ вершин, що не належать циклу, існує інцидентне їй ребро, яке належить маршруту, що починається від деякої вершини циклу.

Всі такі ребра попарно різні. Тоді загальне число ребер графа

$$m \geq \underbrace{k}_{\text{ребра циклу}} + n - k = n \, .$$

Отримали, що $m \geq n$. Суперечність з умовою.

Теорему доведено.

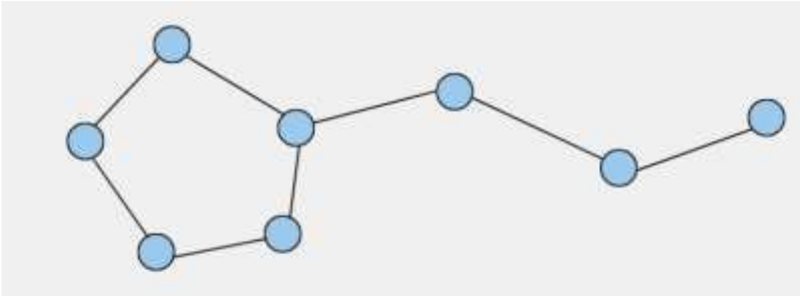


Рисунок 94 – Граф з простим циклом

Ребро зв’язного графа називається **суттєвим** (**мостом**), якщо його вилучення веде до порушення зв’язності цього графа.

У дереві кожне ребро суттєве.

Приклад. Нехай у нас є дерево (рис.95).

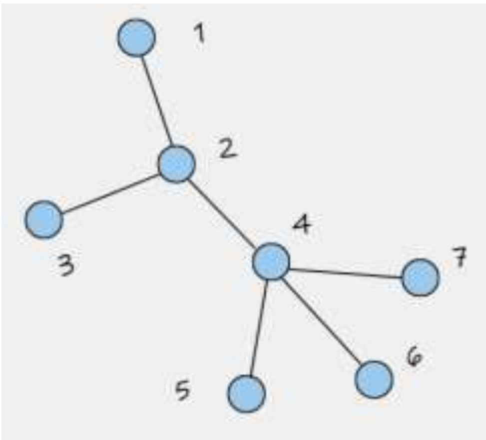


Рисунок 95 – Дерево

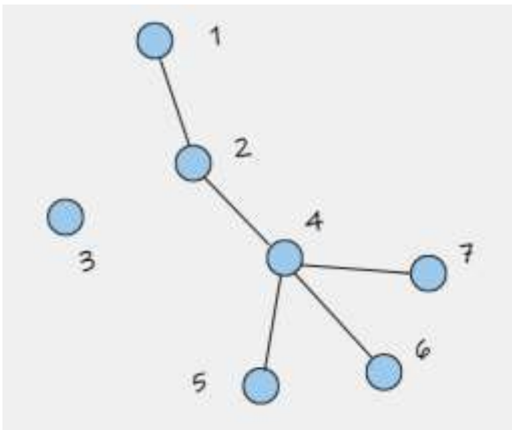


Рисунок 96 – Видалення ребра порушило зв’язність дерева

Видалилимо одне з ребер, наприклад (2,3). В результаті отримаємо незв'язний граф, що має дві компоненти зв'язності (рис.96). Отже, видалене ребро є суттєвим.

Зважені графи

Граф G називається **зваженим**, якщо кожному його ребру (i,j) приписане додатне дійсне число $w(i,j)$. Це число називають **вагою ребра** (i,j). Суму ваг всіх ребер називають **вагою графа** і позначають $w(G)$.

$$w(G) = \sum_{(i,j)} w(i,j).$$

Одна з моделей зваженого графа. Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – міста. Для кожної пари міст A_i, A_j число $w(A_i, A_j)$ означає відстань між ними. Маємо повний зважений граф n- го порядку (рис.97).

Припустимо, що міста $A_1, A_2, \ldots, A_n$ потрібно з'єднати, наприклад, лініями електропередач (або каналами зв'язку, або трубопроводами, або побудувати дороги між ними). Зрозуміло, що найкращим є найдешевші з'єднання, тобто такі, для яких відповідний зважений граф має найменшу вагу.

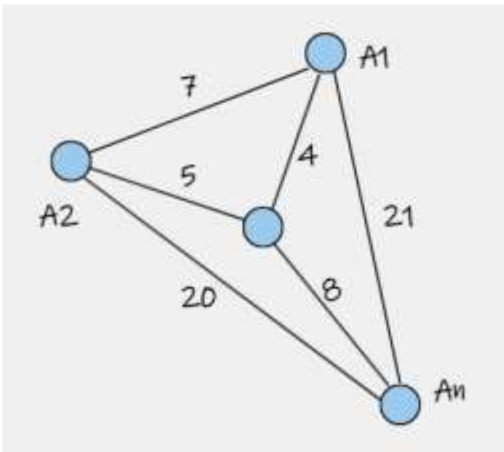


Рисунок 97 – Зважений граф

Приклад постановки задачі. Є n міст, які необхідно зв'язати мережею доріг. Відома вартість будівництва дороги з міста i у місто j: $w(i,j) > 0$. Треба так спроєктувати мережу шляхів, щоби:

a. можна було дістатися з будь-якого міста в будь-яке,

b. вартість реалізації проєкту була мінімальною.

Це ***економічна постановка задачі***. А ***математична постановка задачі*** така. Маємо зважений граф (зважені графи ще називають **мережами**). Треба відшукати мінімальне за вагою остовне дерево. (Чому дерево? – Підграф G^* найменшої ваги є деревом. Дійсно, якщо припустити, що у підграфі G^* є цикл, то можна зменшити вагу підграфа, видаливши ребро.)

Підграф $G_1 = \{V_1, R_1\}$ графа $G = \{V, R\}$ називається **кістяковим** (**остовним**), якщо $V_1 = V$. Підграф $G_1 = \{V_1, R_1\}$ графа $G = \{V, R\}$ називається **кістяковим деревом** (**кістяковим каркасом**, **остовним деревом**), якщо $V_1 = V$ і граф G_1 є деревом.

Теорема Келі (без доведення). Число різних дерев, які можна побудувати на n вершинах, дорівнює n^{n-2}.

Нехай $n = 2$. Тоді $n^{n-2} = 2^0 = 1$. На двох вершинах можна побудувати одне дерево (рис.98).

Рисунок 98 – Єдине дерево на двох вершинах

Нехай $n = 3$. Тоді $n^{n-2} = 3^1 = 3$. На трьох вершинах можна побудувати три дерева (рис.99).

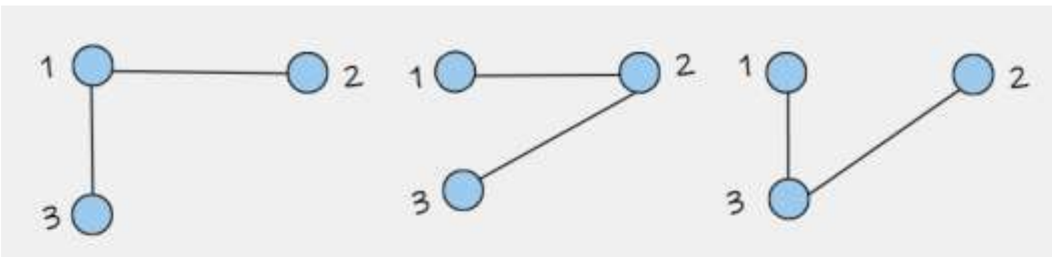


Рисунок 99 –Три дерева на трьох вершинах

Алгоритм Краскала

Нехай G – зважений зв’язний граф, що має n вершин. Потрібно побудувати **мінімальне остовне дерево** (тобто остовне дерево найменшої ваги).

Для цього розглянемо граф T_0, що складається лише з вершин графа G і не має ребер.

1. На першому кроці додамо до графа T_0 будь-яке ребро l_1 з найменшою вагою. Позначимо одержаний граф T_1.

2. На другому кроці додамо до графа T_1 будь-яке ребро $l_2 \neq l_1$ з найменшою вагою. Позначимо одержаний граф T_2.

………………

і. На і-му кроці додамо до графа T_{i-1} будь-яке ребро l_i таке, що: а) l_i має найменшу вагу серед тих ребер графа G, які не входять в T_{i-1}; б) l_i не утворює циклів з ребрами, які входять в T_{i-1}. Позначимо одержаний граф T_i.

…………….

$n-1$. На цьому кроці побудуємо граф T_{n-1}. T_{n-1} – шуканий граф.

Приклад. Нехай G – зважений зв'язний граф, він має 5 вершин (рис.100).

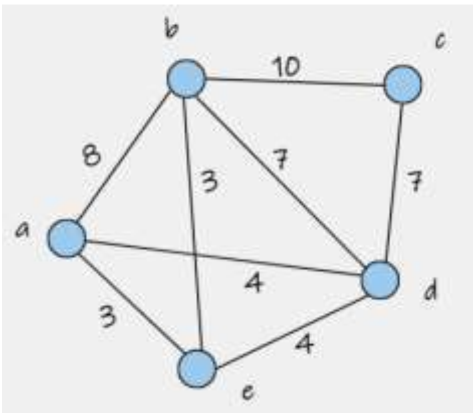


Рисунок 100 – Зважений граф

Вага графа G: 3+3+4+4+7+7+8+10 = 46.

За алгоритмом Краскала побудуємо мінімальне остовне дерево.

Спочатку побудуємо граф T_0 (рис.101).

Граф T_1 ми отримаємо, додавши до графу T_0 ребро найменшої ваги, це буде ребро (a,e) (хоча таким може бути і ребро (b,e)). Граф T_1 подано на рис.102.

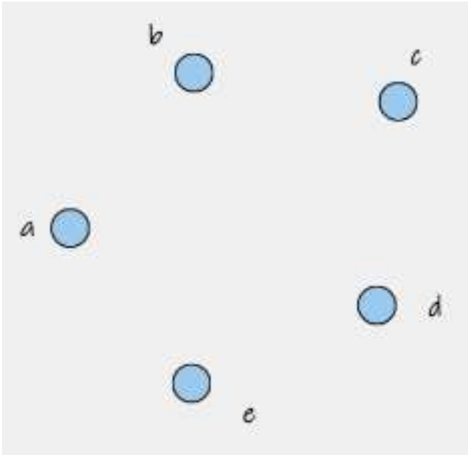


Рисунок 101 – Граф T_0

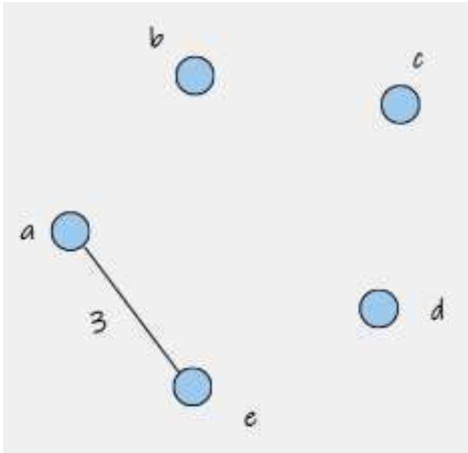


Рисунок 102 – Граф T_1

Граф T_2 ми отримаємо, додавши до графу T_1 ребро найменшої ваги, таким є ребро (b,e). Граф T_2 подано на рис.103.

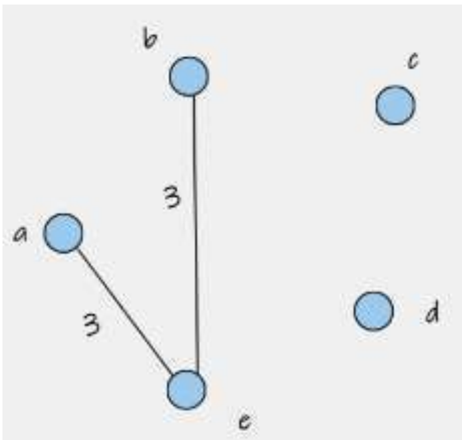


Рисунок 103 – Граф T_2

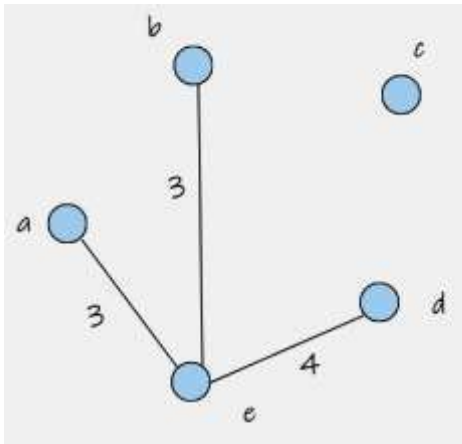


Рисунок 104 – Граф T_3

Коли ми продовжуємо подальшу побудову, ми починаємо слідкувати вже не лише за тим, щоби обирати ребро найменшої ваги, а також за тим, щоби в графі не утворювалися цикли. Наступні ребра найменшої ваги – це ребра (a,d) та (d,e). Ми можемо взяти і те, і інше. Оберемо ребро (d,e), так ми отримаємо граф T_3 (рис.104).

Зараз ми вже не можемо взяти ребро найменшої ваги (a,d), тому що утвориться цикл. Наступні ребра найменшої ваги 7 – це (b,d) та (c,d). Ми не можемо взяти ребро (b,d), тому що утвориться цикл. Ребро (c,d) ми можемо взяти. Беремо це ребро і отримаємо граф T_4 (рис.105). Побудову закінчено, $n-1=4$.

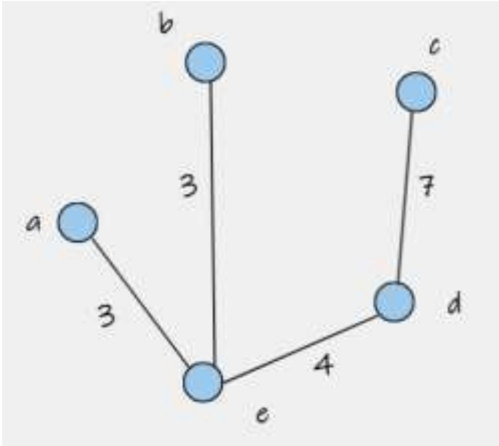


Рисунок 105 – Граф T_4

Отриманий граф є остовним деревом. Його вага 3+3+4+7 = 17. Це остовне дерево є мінімальним.

ЛЕКЦІЯ 13
ТЕМА: Дводольні графи. Розфарбування графів
План лекції

Означення дводольного (двочастинного) графа. Означення дводольного графа в термінах розфарбування його вершин у два кольори. Повний дводольний граф. Приклади. Теорема Кьоніга, приклади.

Вершинне *k* - розфарбування графа, правильне розфарбування. Число колірних класів при *k* - розфарбуванні. Хроматичне число графа, мінімальне розфарбування.

Список термінів та позначень

1. **Дводольний граф**
2. **Двочастинний граф**
3. **Долі (частини) дводольного графа**
4. **Повний дводольний граф**

5. **$K_{p,q}$**
6. **Зірковий граф**
7. **Вершинне *k* - розфарбування**
8. **Правильне розфарбування**
9. **Колірні класи**
10. **Хроматичне число**
11. **$\chi(G)$**
12. ***k*- хроматичний граф**
13. **Мінімальне розфарбування**

Дводольні графи

Означення. Граф називається **дводольним** (**двочастинним**), якщо існує таке розбиття його вершин на дві долі (частини), що кінці кожного ребра належать різним долям (частинам).

Означення дводольного графа можна подати в термінах розфарбування його вершин двома кольорами, наприклад, червоним і синім. При цьому граф називається дводольним, якщо кожну його вершину можна пофарбувати синім або червоним кольором так, щоб кожне його ребро мало один кінець червоний, а другий – синій.

Якщо будь-які дві вершини, які входять у різні долі, суміжні, то граф називається **повним дводольним графом**.

Повний дводольний граф, долі якого складаються з p та q вершин, позначається $K_{p,q}$.

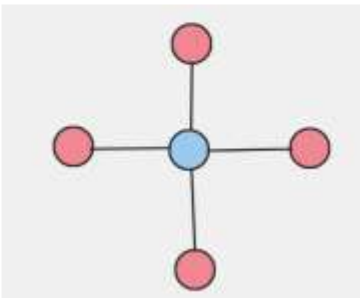


Рисунок 106 – Граф $K_{1,4}$

Приклад. На рис.106 подано повний дводольний граф $K_{1,4}$. Одна його доля складається з однієї вершини (вершина синього кольору), а друга доля складається з чотирьох вершин (червоного кольору). Синя вершина суміжна з кожною червоною і кожне ребро має вершини різних кольорів. Отже, це 1) дводольний граф, це 2) повний дводольний граф.

Приклад. На рис.107 подано повний дводольний граф $K_{3,3}$. З цим графом пов’язана відома задача про три сусіди та три колодязі. Є три хати, в яких мешкають три сусіди (червоні вершини) і є три колодязі (сині вершини). Кожен з сусідів хоче користуватися кожним з колодязів, причому так, щоби його власні стежинки до колодязів не перетиналися зі стежинками інших сусідів. На рис.107 ці плани не реалізовані. А чи можна побудувати інший рисунок?

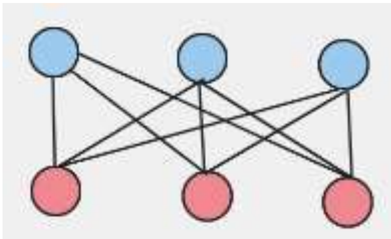


Рисунок 107 – Граф $K_{3,3}$

Повний дводольний граф $K_{1,n}$ називається **зірковим**. Так, $K_{1,4}$ – це зірковий граф.

Приклад. Повний дводольний граф $K_{1,8}$ (рис.108) – це зірковий граф.

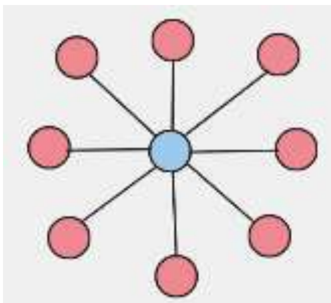


Рисунок 108 – Граф $K_{1,8}$

Приклад. Повний граф може не бути дводольним. На рис.109 зображено повний граф K_3, його вершини неможливо розфарбувати у два кольори так, щоби кінці кожного ребра були різного кольору. Отже, повний граф K_3 не є дводольним.

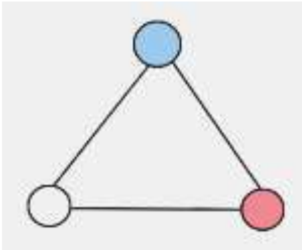


Рисунок 109 – Граф K_3

Приклад. Розглянемо граф, поданий на рисунку 110.

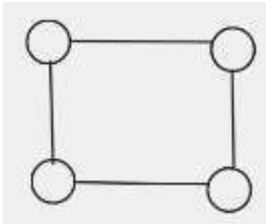


Рисунок 110 – Граф четвертого порядку

Не важко переконатися в тому, що цей граф є дводольним, для цього достатньо розфарбувати його вершини так, як це показано на рис.111.

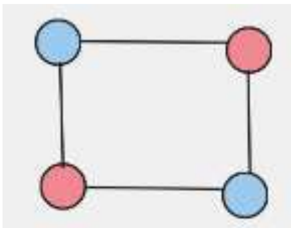


Рисунок 111 – Дводольний граф

Що ж це за граф такий? Це не повний граф, це не K_4, тому що у повному графі кожна вершина суміжна з кожною. Це повний дводольний граф, тому що кожна червона вершина суміжна з кожною синьою, а вершини одного кольору між собою не суміжні. Кожна доля складається з двох вершин, отже, це $K_{2,2}$. Інше зображення $K_{2,2}$ ми бачимо на рис.112.

У зв'язку з наведеними прикладами виникають такі запитання.

1) Чи існують повні графи, які є дводольними?

2) У наших прикладах всі графи, що є дводольними, є повними дводольними графами. Чи існують дводольні графи, які не є повними дводольними?

Відповіді на запитання пропонується відшукати самостійно.

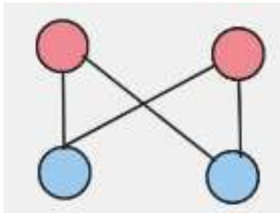


Рисунок 112 – Повний дводольний граф $K_{2,2}$

Теорема Кьоніга (без доведення). Граф G є дводольним тоді й тільки тоді, коли G не має циклів непарної довжини.

Приклади. Повний граф K_3 має цикл непарної довжини $\Rightarrow$ K_3 не дводольний. Граф, поданий на рис.110, не має циклів непарної довжини $\Rightarrow$ це дводольний граф.

З теореми Кьоніга випливає, що ациклічний граф є дводольним. Треба лише, щоби його порядок був не менший за двійку. Отже, будь-яке дерево, порядок якого $n \geq 2$, є дводольним графом.

Приклад. На рис.113 ми бачимо ациклічний зв'язний граф, тобто дерево. Порядок цього графу 8. Це дводольний граф, і ми розфарбували його вершини в червоний та синій кольори.

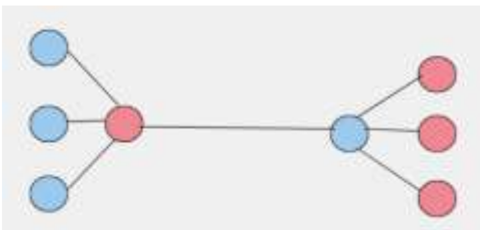


Рисунок 113 – Дерево – приклад дводольного графа

Розфарбування графів

Нехай $G = \{V, R\}$ – граф, k – деяке натуральне число. Довільна функція $f : V \to K$, де $K = \{1, 2, ..., k\}$ називається вершинним k-розфарбуванням, або просто k**- розфарбуванням** графа G.

Розфарбування називається **правильним**, якщо $\forall (u,v) \in R \Rightarrow f(u) \neq f(v)$, тобто суміжні вершини розфарбовані у різні кольори.

Функція f не обов'язково взаємно однозначна, тому при k-розфарбуванні фактично може бути використано менше ніж k кольорів. Отже, правильне k- розфарбування можна розглядати як розбиття множини вершин V графа G на класи $V_1 \cup V_2 \cup ... \cup V_l = V$, де $l \leq k$, $V_i \neq \varnothing, i = \overline{1,l}$. Класи $\{V_i\}$ називаються **колірними класами**.

Мінімальне число k, при якому існує правильне k- розфарбування графа G, називається **хроматичним числом** цього графа, позначається $\chi(G)$.

Якщо $\chi(G) = k$, то граф G називається k **- хроматичним**.

Правильне k- розфарбування графа G при $k = \chi(G)$ називається **мінімальним розфарбуванням**.

Приклад. На рис.114 подано граф порядку 8 і здійснено одне з можливих правильних 4 – розфарбувань цього графу (використано чотири кольори). Пропонується відповісти на питання:

1) Чи є таке розфарбування мінімальним?
2) Чому дорівнює хроматичне число графа?

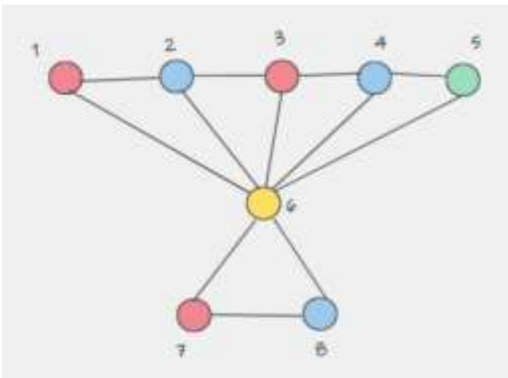


Рисунок 114 – 4-розфарбування графа

ЛЕКЦІЯ 14

ТЕМА: Практичні задачі, що зводяться до задачі розфарбування. Хроматичні числа деяких графів. Ейлерові графи

План лекції

Задача складання розкладу занять. Задача розподілу устаткування.

Хроматичні числа повних графів. Хроматичні числа циклічних графів. Теорема, яка оцінює зверху хроматичне число графа. Теорема про п’ять фарб. Гіпотеза чотирьох фарб.

Ейлерові та напівейлерові графи. Ейлерів цикл та ейлерів ланцюг. Задача про кенігсберзькі мости. Теореми про ейлерові та напівейлерові графи, приклади застосування теорем.

Список термінів та позначень

1. **Регулярний граф**
2. **Регулярний граф степеня *k***
3. **Біхроматичний граф**
4. **Циклічний граф**
5. C_n
6. **Ейлерів цикл**
7. **Ейлерів граф**
8. **Ейлерів ланцюг**
9. **Напівейлерів граф**

Практичні задачі, що зводяться до задачі розфарбування

А) Задача складання розкладу занять.

Нехай треба прочитати кілька лекцій і зробити це за найкоротший проміжок часу. Нехай кожна лекція триває одну годину. Нехай деякі лекції не можуть читатися одночасно (наприклад, коли їх читає один і той же лектор).

Побудуємо граф $G=\{V,R\}$, де V – множина вершин, яка відповідає множині лекцій, причому дві вершини суміжні тоді й тільки тоді, коли відповідні лекції не можуть читатися одночасно.

Всяке правильне розфарбування графа визначає допустимий розклад: лекції одного колірного класу читаються одночасно. Оптимальний розклад (всі лекції прочитано за найкоротший проміжок часу) відповідає мінімальним розфарбуванням.

Мінімальне число годин, яке необхідне для того, щоби прочитати всі лекції, дорівнює хроматичному числу графа $\chi(G)$.

Приклад. Скласти один з варіантів оптимального розкладу для таких занять:

КДМ, практика ПЗ-21-1

КДМ, практика ПЗ-21-2

КДМ, лекція ПЗ-21-1,2

Мат. аналіз, практика ПЗ-21-1

Мат. аналіз, лекція ПЗ-21-1,2

Програмування ПЗ-21-2

Розв'язання. Побудуємо граф $G=\{V,R\}$, де V – множина вершин, яка відповідає множині занять. Вершини позначено КД1, КД2, КДл, М1, Мл, П2 відповідно до списку занять. Ребра сполучають між собою ті вершини, які відповідають заняттям, що не можуть проводитися одночасно. Такий граф побудовано на рис.115.

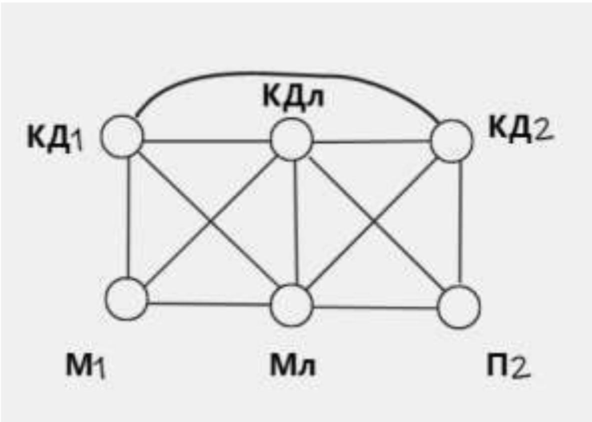


Рисунок 115 – Граф $G=\{V,R\}$

Розфарбуємо вершини графа. Розфарбування має бути правильним. Розфарбування має бути мінімальним. На рис.116 подано одне з таких розфарбувань.

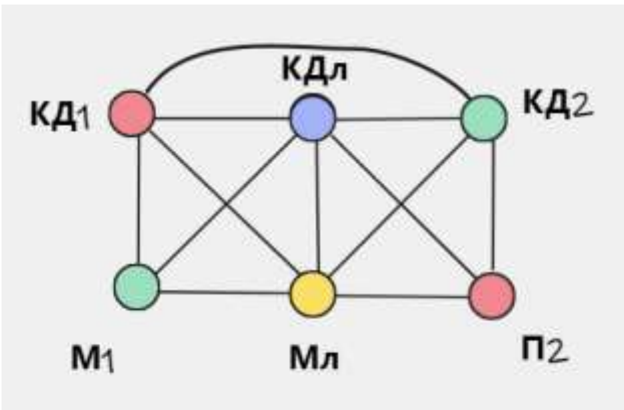


Рисунок 116 – Розфарбування вершин графа

У нас чотири колірні класи: $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$. Заняття одного колірного класу можуть проводитися одночасно. Один з варіантів розкладу такий:

1 пара. КДМ, практика ПЗ-21-1; програмування ПЗ-21-2.

2 пара. КДМ, лекція ПЗ-21-1,2.

3 пара. Мат. аналіз, практика ПЗ-21-1; КДМ, практика ПЗ-21-2.

4 пара. Мат. аналіз, лекція ПЗ-21-1,2.

Мінімальне число годин, яке необхідне для того, щоби провести всі заняття, дорівнює хроматичному числу графа $\chi(G)$, $\chi(G) = 4$.

Б) Задача розподілу устаткування.

Дано множини $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ – види робіт та $S = \{s_1, s_2, ..., s_m\}$ – види механізмів. Нехай для виконання кожної з робіт необхідний один і той самий час. Нехай для виконання кожної з робіт необхідні деякі механізми, причому жодний з механізмів не може одночасно використовуватися в кількох роботах. Необхідно розподілити механізми так, щоб загальний час виконання всіх робіт був мінімальним.

Побудуємо граф $G = \{V, R\}$, де $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, і $(v_i, v_j) \in R \Leftrightarrow$ для виконання робіт v_i та v_j потрібен хоча б один спільний механізм.

При правильному розфарбуванні графа G роботи, які відповідають вершинам одного кольору, можна виконувати одночасно, а найменший час виконання всіх робіт досягається при мінімальному розфарбуванні.

Хроматичні числа деяких графів

1) Повні графи порядку *n*.

Розглянемо повні графи K_n для значень $n = 1,2,3,4$.

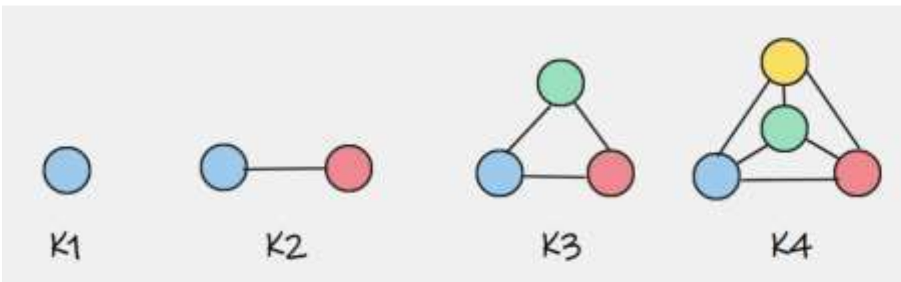


Рисунок 117 – Правильні розфарбування вершин повних графів

Будемо правильно розфарбовувати вершини цих графів. Результати таких розфарбувань ми бачимо на рис.117. Хроматичні числа наведених повних графів збігаються з їх порядком. Такий висновок є справедливим і для всіх інших повних графів: $\chi\left(K_n\right)=n$.

2) **Повні дводольні графи**.

Розглянемо повні дводольні графи $K_{p,q}$ (див. рис.106-108, 111, 112). Для кожного з повних дводольних графів $K_{p,q}$ хроматичне число дорівнює двом: $\chi\left(K_{p,q}\right)=2$.

3) **Циклічні графи**.

Означення. Граф називається **регулярним**, якщо всі його вершини мають один і той же степінь. Якщо степінь кожної вершини дорівнює k, то граф називається регулярним графом степеня k.

Приклад. Повний граф порядку n є регулярним графом степеня $n-1$:

$$K_n=\{V,R\} \quad \forall u\in V \quad deg\, u=n-1.$$

Означення. Зв'язний регулярний граф степеня 2 називається **циклічним**.

Циклічний граф порядку n позначають C_n $\left(n\geq 3\right)$.

Приклад. На рис.118 подані циклічні графи C_3,C_4,C_5,C_6.

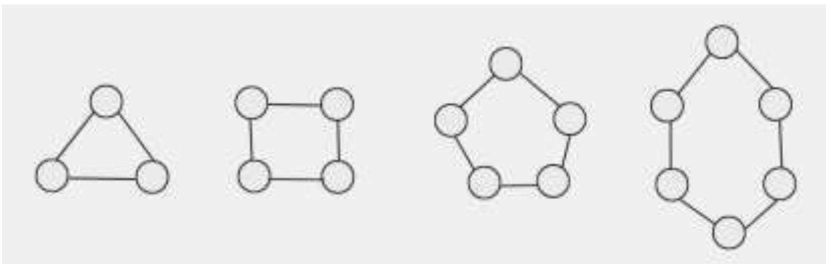


Рисунок 118 – Циклічні графи

Розфарбуємо вершини цих циклічних графів (ми виконуємо правильні мінімальні розфарбування). Результати розфарбування подані на рис.119.

Хроматичні числа циклічних графів: $\chi\left(C_3\right)=3$, $\chi\left(C_4\right)=2$, $\chi\left(C_5\right)=3$, $\chi\left(C_6\right)=2$. Ми бачимо, що хроматичне число визначається порядком графа, а саме

$$\chi\left(C_{2n}\right)=2,$$

$$\chi\left(C_{2n+1}\right)=3.$$

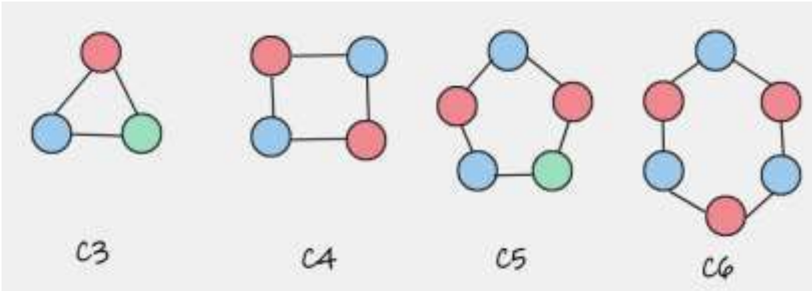


Рисунок 119 – Розфарбування циклічних графів

2 – хроматичні графи називають **біхроматичними**.

Теорема 1 (без доведення). Нехай граф $G = \{V, R\}$ такий, що

$$\max_{u \in V} \{deg\, u\} = r.$$

Тоді $\chi(G) \le r + 1$.

Подивимось, що дає ця теорема для розглянутих нами типів графів.

Так, якщо $G = K_n$, то $r = n - 1$ і за теоремою 1 $\chi(G) \le n$. Це точна оцінка зверху, тому що $\chi(K_n) = n$.

А, якщо $G = C_n$, то $r = 2$ і за теоремою 1 $\chi(G) \le 3$. Ця оцінка зверху є точною для C_{2n+1}, тому що $\chi(C_{2n+1}) = 3$.

Теорема 2 (**Теорема про п'ять фарб**) (без доведення). Для всякого планарного графа справедлива нерівність

$$\chi(G) \le 5.$$

Або: Будь-який планарний граф можна 5-розфарбувати.

Ця теорема була доведена Хівудом (Percy John Heawood) у 1890 р.

У 1879 р. англійський математик А. Кейлі (Arthur Cayley) сформулював **гіпотезу чотирьох фарб**: будь-який планарний граф можна 4-розфарбувати.

Історично гіпотеза чотирьох фарб пов'язана з розфарбуванням географічних карт. Є географічна карта. Скільки фарб необхідно мати для такого її розфарбування, щоби жодна пара сусідніх країн не була пофарбована одним кольором? Чи вистачить чотирьох фарб?

У підручнику «Основи дискретної математики», Капітонова Ю.В. та інші, знаходимо такий текст: «Вже більше століття математики намагаються розв'язати дану проблему (довести справедливість або хибність гіпотези), але досі остаточного розв'язку так і не знайдено.

Відомо, наприклад, що всякий планарний граф порядку < 52 розфарбовується за допомогою чотирьох фарб».

У підручнику «Дискретна математика», І.А. Джалладова, О.Д. Шарапов, міститься посилання на дослідження 1976 р. за допомогою ЕОМ і слова «можна вважати, що формально гіпотеза чотирьох фарб доведена».

Задачі визначення хроматичного числа графа і побудови мінімального розфарбування досить складні, а ефективні алгоритми їх розв'язання невідомі.

Ейлерові графи

Означення. Зв'язний граф $G = \{V, R\}$ називається **ейлеровим**, якщо існує замкнутий ланцюг (цикл), який включає кожне ребро графа.

Такий ланцюг називається **ейлеровим циклом**.

Означення. Зв'язний граф $G = \{V, R\}$ називається **напівейлеровим**, якщо існує незамкнутий ланцюг, який включає кожне ребро графа.

Такий ланцюг називається **ейлеровим ланцюгом**.

Приклад. На рис.120 подано граф, в якому неможливо побудувати ланцюг, що містить всі ребра графа. Отже, це не ейлерів граф. Також він не є напівейлеровим.

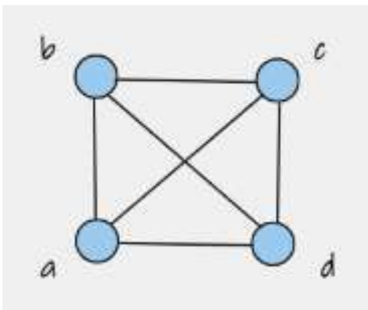


Рисунок 120 – Не ейлерів граф

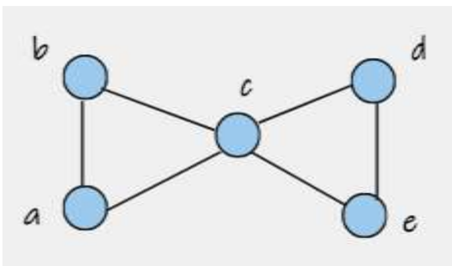


Рисунок 121 – Ейлерів граф

Приклад. На рис.121 подано граф, в якому існує цикл, що містить усі ребра графа. Таким циклом є $abcdeca$ Це ейлерів цикл. Отже, граф ейлерів.

Приклад. На рис.122 подано граф, в якому існує незамкнутий ланцюг, що містить усі ребра графа. Таким ланцюгом є $aedcebcab$. Це ейлерів ланцюг. Отже, граф напівейлерів.

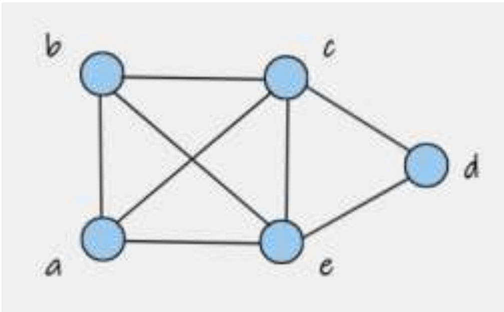


Рисунок 122 – Напівейлерів граф

Поняття «ейлерів граф» виникло у зв'язку з задачею про кенігсберзькі мости. Леонард Ейлер (1707 – 1782) – родоначальник теорії графів, у 1736 р. розв'язав задачу про кенігсберзькі мости.

Місто Кенігсберг ріка Преголя ділила на чотири частини, які були з'єднані сімома мостами. На рис.123 (рисунок взято з www.britannica.com/science/Konigsberg-bridge-problem) частини міста позначені *A, B, C, D*, а мости позначені цифрами 1, 2, …, 7 Задача: якщо вийти з будь-якої частини міста, то чи можна пройти кожен міст один раз і повернутися в ту частину міста, з якої вийшли?

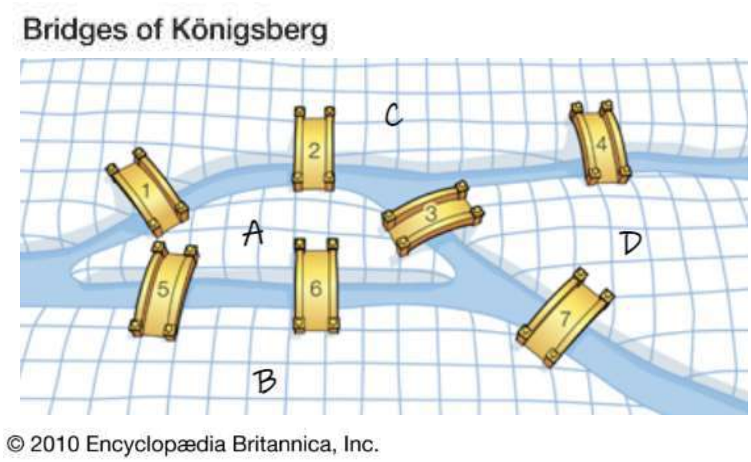


Рисунок 123 – План міста Кенігсберг за часів Ейлера

Ейлер довів неможливість такого маршруту, позначивши частини міста точками, а мости – лініями й одержавши граф (рис.124). В задачі треба було визначити, чи має граф ейлерів цикл.

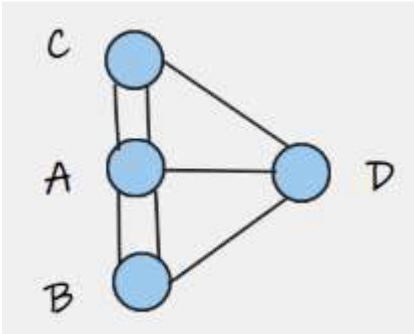


Рисунок 124 – Граф до задачі про кенігсберзькі мости

Теорема (без доведення). Зв'язний граф $G=\{V,R\}$ **ейлерів** тоді й тільки тоді, коли кожна вершина графа має парний степінь.

Застосуємо теорему до мультиграфа задачі про мости. Бачимо, що, наприклад, $deg\,D=3$, отже у графі не існує ейлерова цикла.

Теорема (без доведення). Зв'язний граф $G=\{V,R\}$ **напівейлерів** тоді й тільки тоді, коли точно дві вершини графа мають непарний степінь. Для ейлерова ланцюга одна з цих вершин є початковою, а друга – кінцевою.

Приклад. На рис.120 граф, у якого $deg\,u=3, \quad \forall u \in V$. Це не ейлерів граф. Також він не є напівейлеровим.

Приклад. На рис.121 граф, всі вершини якого парного степеня. Це ейлерів граф.

Приклад. На рис. 122 граф, в якому точно дві вершини непарного степеня. Ці вершини (a та b) є початком та кінцем ейлерова ланцюга $aedcebcab$. Граф напівейлерів.

ЛЕКЦІЯ 15

ТЕМА: Гамільтонові графи. Задачі, для розв'язання яких треба побудувати гамільтонів цикл

План лекції

Гамільтонів цикл, гамільтонів граф, приклади. Відсутність критерію гамільтоновості. Теорема Дірака, теорема Оре. Застосування теорем Дірака та Оре. Достатність умов гамільтоновості, відсутність

необхідних умов гамільтоновості. Запис гамільтонового циклу у вигляді перестановки. Алгоритм пошуку гамільтонового циклу серед всіх перестановок, його часова складність. Неможливість застосування алгоритму на практиці. Факторіальна складність алгоритму. Відсутність алгоритмів поліноміальної складності.

Задача про шахового коня. Задача про званий обід. Задача комівояжера.

Список термінів

1. **Цикл**
2. **Простий цикл**
3. **Гамільтонів цикл**
4. **Гамільтонів граф**
5. **Часова складність алгоритма**
6. **Поліноміальна складність**
7. **Факторіальна складність**

Гамільтонові графи

Означення. **Гамільтоновим циклом** називається простий цикл, що проходить через усі вершини графа.

(Простий цикл – це замкнений маршрут, всі ребра якого різні, всі вершини різні)

Означення. Граф, у якому є гамільтонів цикл, називається **гамільтоновим графом**.

Приклад. На рис.125 ми бачимо граф, у якому існує гамільтонів цикл. 1 2 3 5 4 1 – це гамільтонів цикл. Отже, це гамільтонів граф. Цей граф не є ейлеровим.

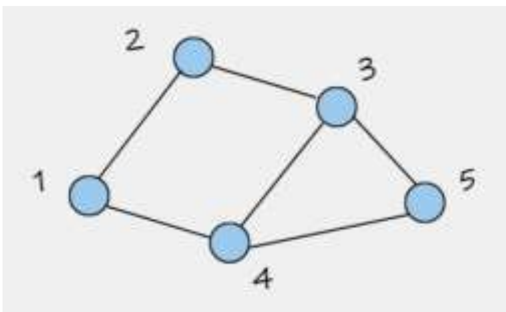


Рисунок 125 – Гамільтонів граф

Приклад. На рис.126 граф, у якому не існує гамільтонового циклу. Це не гамільтонів граф. Це також не ейлерів граф.

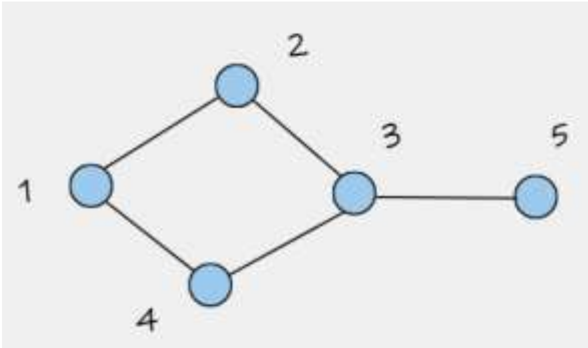


Рисунок 126 – Не гамільтонів граф

Пошук критерію гамільтоновості графа – це одна з основних невирішених проблем теорії графів. Про гамільтонові графи відомо ще зовсім мало.

Теорема Дірака (без доведення). Якщо в графі $G=\{V,R\}$ з $n\geq 3$ вершинами для кожної вершини $u\in V$ виконується

$$deg\,u\geq\frac{n}{2}\ ,$$

то граф G є гамільтоновим.

Теорема Оре (без доведення). Якщо для будь-якої пари x та y несуміжних вершин графа G порядку $n\geq 3$ виконується умова

$$deg\,x+deg\,y\geq n,$$

то граф G є гамільтоновим.

Приклад. Візьмемо гамільтонів граф з рис.125. Для цього графа $deg1=2$, $deg\,2=2$, $deg3=3$, $deg\,5=2$, $deg\,4=3$. Порядок графа 5, тому $\frac{n}{2}=2{,}5$. Маємо $deg1<\frac{n}{2}$, $deg\,2<\frac{n}{2}, deg\,5<\frac{n}{2}$. Умови теореми Дірака не виконуються.

Далі, у цьому графі вершини 2 та 5 несуміжні, $deg\,2+deg\,5=2+2=4<n=5$. Умови теореми Оре не виконуються.

Теореми Дірака та Оре дають **достатні умови гамільтоновості**. Ці умови не є необхідними. Для графів загального вигляду необхідні умови невідомі.

Коли немає кратних ребер, гамільтонів цикл записують послідовністю вершин, як у прикладі (рис.125) : 1 2 3 5 4 1 – це гамільтонів цикл. Домовляємося, що у цьому параграфі будемо записувати гамільтонів цикл у такий спосіб: 1 2 3 5 4. При такому способі запису кожний гамільтонів цикл відповідає деякій перестановці всіх вершин графа. Одному й тому ж гамільтоновому графу відповідає деяка множина гамільтонових циклів. Так, для графа з рис.125 гамільтоновими циклами є, наприклад, такі перестановки

1 2 3 5 4

2 3 5 4 1

4 5 3 2 1.

А, наприклад, перестановка 2 1 3 4 5 не є гамільтоновим циклом (взагалі у графі такого маршруту немає).

З одного боку, критерію гамільтоновості немає. З іншого боку, існує алгоритм, який, на перший погляд, можна застосувати до вирішення довільної задачі про гамільтонів цикл: побудувати всі перестановки вершин і перевірити, яка з них є гамільтоновим циклом.

Якщо порядок графа n, то всіх перестановок буде $n!$ Обговоримо часову складність такого алгоритму. Оскільки комп'ютери мають різну продуктивність, то оцінку часу виразимо у кількості елементарних операцій. Для побудови однієї перестановки треба виконати n операцій. Всього перестановок $n!$ Отже, потрібно виконати $n \cdot n!$ обчислювальних операцій. Так, якщо $n = 20$ і кожний елементарний крок комп'ютера виконується за 10^{-7} секунд, то на виконання алгоритму потрібно $20 \cdot 20! \approx 48 \cdot 10^{18}$ операцій або $48 \cdot 10^{11}$ секунд, що складає приблизно 150 000 років. Алгоритм має **факторіальну складність**, його неможливо застосувати на практиці. Алгоритмів поліноміальної складності не відомо. **Поліноміальний алгоритм** – це алгоритм, часова складність якого оцінюється поліномом від вимірності задачі, наприклад, n^2, n^3. Поліноміальні алгоритми вважаються ефективними. Якщо поліноміального алгоритму немає, то задачу відносять до «важкорозв'язуваних».

Задачі, для розв'язання яких треба побудувати гамільтонів цикл

1) Задача про шахового коня. На шаховій дошці знаходиться шаховий кінь. Він починає рух за своїм правилом (літерою «Г»). Чи може ця шахова фігура почати рух із довільної клітинки, пройти всі клітинки дошки по одному разу і повернутися на ту клітинку, з якої розпочинала рух? Для розв'язання задачі побудуємо граф порядку 64. Вершини графа відповідають клітинкам шахівниці. Вершина А з'єднана ребром з вершиною Б, якщо за один хід шаховий кінь може перейти з клітинки А на клітинку Б. Отже, граф $G = \{V, R\}$ побудовано. Наша задача – з'ясувати, чи існує у графі замкнений маршрут, який проходить через всі вершини графа по одному разу, тобто, чи існує у графі гамільтонів цикл. Таким чином, задача зводиться до побудови гамільтонового графа. На рис.127 наведено одне з розв'язань задачі (рисунок взято з https://new.uschess.org/news/chess-math-closer-look-knights-tour).

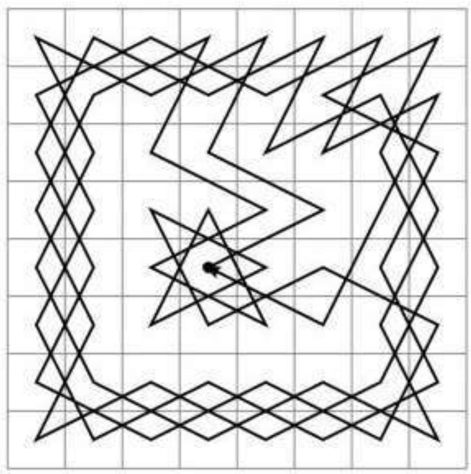


Рисунок 127 – Маршрут шахового коня

2) Задача про званий обід. Обід відбувається за круглим столом. Серед гостей деякі знайомі один з одним (є друзями). За яких умов всіх можна розсадити за столом так, щоби по обидва боки від кожного з присутніх сиділи його друзі?

У цій задачі можна побудувати граф $G = \{V, R\}$, де вершинами є гості, а ребрами з'єднані друзі. Ми маємо з'ясувати, чи існує в графі такий маршрут: маршрут замкнений, проходить через всі вершини, через кожну лише один раз. Це гамільтонів цикл. Таким чином, гостей можна розсадити за столом так, як описано вище, якщо побудований нами граф є гамільтоновим.

3) Задача комівояжера. Комівояжер має об'їхати n міст та повернутися у початок маршруту. Для того, щоби скоротити витрати, комівояжер хоче побудувати такий маршрут, щоби у кожному з міст побувати лише по одному разу.

У цій задачі вершинами графа $G = \{V, R\}$ є міста. Ребрами з'єднані ті вершини, що відповідають містам, які сполучені шляхом безпосередньо. Комівояжер має побудувати гамільтонів цикл (якщо це можливо). На рис.128 зображено саме таку ситуацію, коли комівояжер вдало впорався зі своєю задачею.

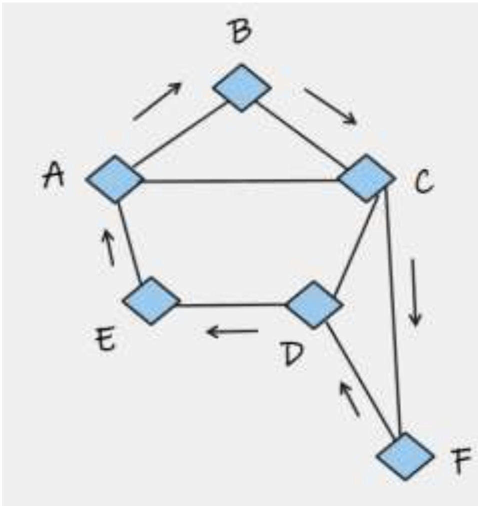


Рисунок 128 – Приклад розв'язання задачі комівояжера

ЛЕКЦІЯ 16

ТЕМА: Планарні графи. Елементи теорії орієнтованих графів

План лекції

Плоский граф. Планарне укладення. Планарний граф. Приклади планарних та непланарних графів. Задача про три будинки та три колодязі. Важливість вивчення планарності. Деякі твердження щодо планарних графів. Підрозбиття графа. Гомеоморфність графів. Теорема Понтрягіна, Куратовського.

Орієнтований граф. Лема Ейлера для орграфів. Стоки та джерела орграфа.

Список термінів

1. **Плоский граф**
2. **Планарне укладення графа**
3. **Планарний граф**
4. **Підрозбиття графа**

5. Гомеоморфність графів
6. Орієнтований граф
7. Орграф
8. Дуга орграфа
9. Початок (кінець) дуги
10. Півстепінь входу вершини
11. Півстепінь виходу вершини
12. Степінь вершини орграфа
13. Стік орграфа
14. Джерело орграфа

Планарні графи

Означення. **Плоским графом** називається граф, ребра якого не перетинаються, крім, можливо, у спільних вершинах.

Приклади. На рис.129 ми бачимо плоский граф, це K_4. Граф на рис.130 не є плоским, тому що його ребра (1,3) та (2,4) перетинаються.

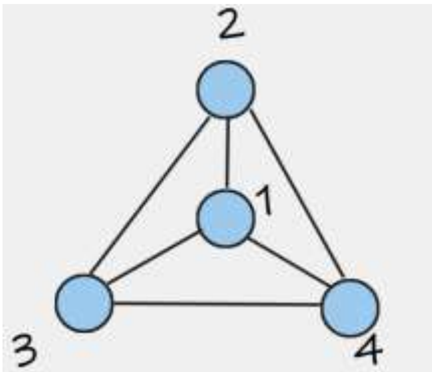
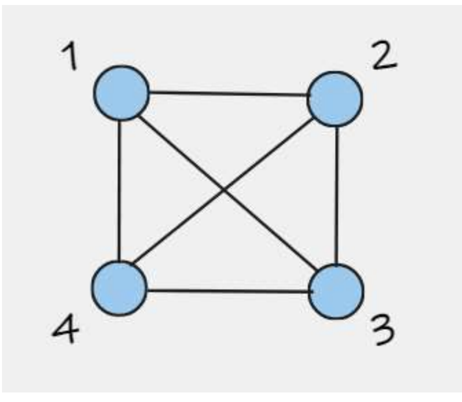


Рисунок 129 – Плоский граф



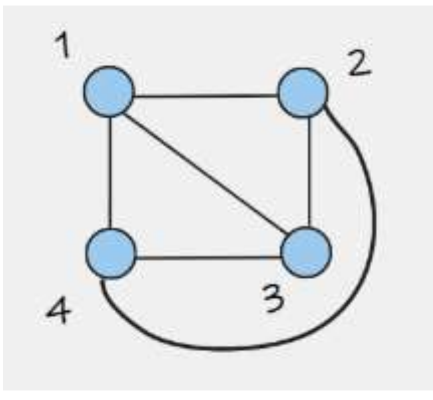


Рисунок 130 – Не плоский граф Рисунок 131 – Планарне укладення

Означення. **Планарним укладенням** графа називають таке його розташування на площині, при якому будь-які два ребра можуть перетинатися лише у вершинах.

Приклад. На рис.131 маємо планарне укладення графа з рис.130.

Означення. Граф називається **планарним** графом, якщо для нього існує планарне укладення, тобто він ізоморфний деякому плоскому графу.

Приклад. Граф на рис.130 є планарним. Дійсно, він є ізоморфним плоскому графу, поданому на рис.129.

Відомо, що для графів K_5 (рис.132) та $K_{3,3}$ (рис.133) планарних укладень не існує.

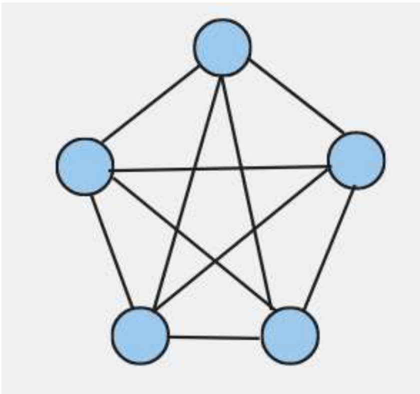


Рисунок 132 – Повний граф K_5

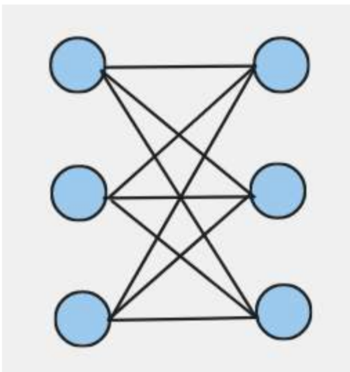


Рисунок 133 – Повний дводольний граф $K_{3,3}$

У лекції 13 ми вже згадували повний дводольний граф $K_{3,3}$ як математичну модель задачі про три будинки та три колодязі. Там ставилося питання, чи можна прокласти стежки від кожного будинку до кожного колодязя так, щоби стежки не перетиналися? Відповідь на це питання – ні, тому що граф $K_{3,3}$ непланарний. Доведення цього факту можна відшукати в [5] (дивись список рекомендованої літератури).

Важливість вивчення планарності

Під час виготовлення мікросхем необхідно з'ясувати, чи можна схему радіоелектронного пристрою зобразити на площині без перетину провідників. Аналогічне завдання виникає при проєктуванні залізничних та інших транспортних шляхів, де небажані переїзди, при розробці інформаційних, енергетичних та інших мереж.

Щодо планарності справедливі такі твердження.

1) Усякий підграф планарного графа теж є планарним.

2) Якщо граф містить непланарний підграф, то і сам граф непланарний.

3) Граф є планарним тоді й тільки тоді, коли кожна зв'язна компонента цього графа є планарним графом.

Нехай u, v – суміжні вершини графа G. Вилучимо з графа G ребро (u, v), після чого додамо до нього нову вершину w і два нових ребра (u, w) та (w, v). Утворений новий граф G_1 називається **підрозбиттям графа** G (рис. 134). Процес утворення графа G_1 з графа G також називається підрозбиттям.

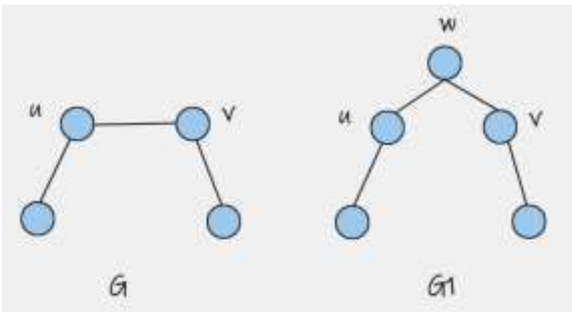


Рисунок 134 – Графи G та G_1

Означення. Два графи називаються **гомеоморфними**, якщо вони можуть бути одержані з одного і того ж графа за допомогою операції введення вершини в ребро.

Приклад. На рис.135 подано гомеоморфні графи.

Графи G та G_1 гомеоморфні, якщо їх можна перетворити на ізоморфні шляхом послідовних підрозбиттів.

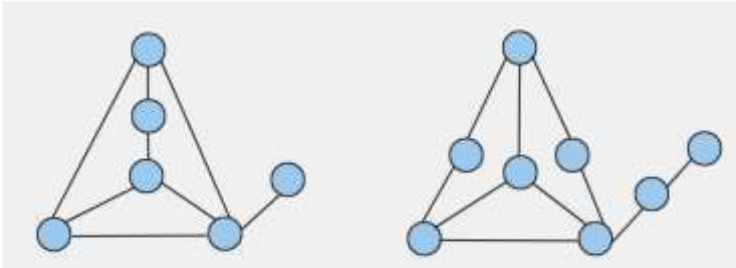


Рисунок 135 – Гомеоморфні графи

Відшукання загального критерію планарності графів було однією з найскладніших задач теорії графів. Розв'язання цієї задачі було знайдено Л.С. Понтрягіним та незалежно від нього К. Куратовським. Доведення цієї теореми вважається дуже складним і не наводиться у підручниках. Ми теж лише сформулюємо цю теорему.

Теорема Понтрягіна, Куратовського. Граф планарний тоді і тільки тоді, коли він не має підграфів, гомеоморфних K_5 або $K_{3,3}$.

Для розпізнавання планарності можна діяти так. Розглядаючи кожну компоненту зв'язності, виконати операцію стягування ребер для всіх таких пар вершин, одна з яких має степінь 2. Потім перебрати всі підграфи з п'ятьма та шістьма вершинами. Якщо кожний такий підграф не є K_5 та $K_{3,3}$, то граф планарний. Інакше граф не планарний.

Елементи теорії орієнтованих графів

Коли ребра графа $G=\{V,R\}$ задано у вигляді упорядкованих пар, то граф G називається орієнтованим (**орграфом**).

Рисунок 136 – Дуга (u,v)

Ребра орграфа називаються **дугами**, їх зображують відрізками або дугами, напрямки дуг позначають стрілками. На рис.136 подано дугу (u,v), u – це **початок дуги**, v – **кінець дуги**.

Для орграфів такі поняття, як суміжні вершини, інцидентні вершина та ребро (дуга), степінь вершини, ізольована вершина та деякі інші збігаються з такими поняттями для неорієнтованих графів.

Означення. Число дуг, які виходять з вершини u, називається **півстепенем виходу** вершини u.

Означення. Число дуг, які входять у вершину u, називається **півстепенем входу** вершини u.

Півстепінь виходу вершини u позначається $d^-(u)$, півстепінь входу вершини u позначається $d^+(u)$.

Означення. **Степенем вершини** u орграфа називається число

$$deg\,u = d^-(u) + d^+(u).$$

Лема Ейлера для орграфів (без доведення). Сума півстепенів входу всіх вершин орграфа $G=\{V,R\}$ дорівнює сумі півстепенів виходу всіх його вершин:

$$\sum_{u\in V} d^+(u) = \sum_{u\in V} d^-(u) = q.$$

Тут q – це число дуг графа.

Якщо u – вершина графа, для якої $d^-(u) = 0$, $d^+(u) \neq 0$, то таку вершину називають **кінцевою**, **висячою** вершиною, або **стоком**.

Якщо u – вершина графа, для якої $d^+(u) = 0$, $d^-(u) \neq 0$, то таку вершину називають **кінцевою**, **висячою** вершиною, або **джерелом**.

Приклад. На рис.137 подано орграф $G=\{V,R\}$. $V=\{u,v,w\}$. Вершина u є джерелом, вершина w є стоком, число дуг $q=3$.

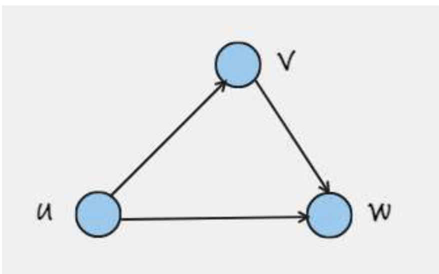


Рисунок 137 – Орграф

Перевіримо для цього орграфу виконання формули з леми Ейлера. Для цього знайдемо суми півстепенів входу та виходу.

$$\sum_{u\in V} d^+(u) = d^+(u) + d^+(v) + d^+(w) = 0+1+2=3,$$

$$\sum_{u\in V} d^{-}(u) = d^{-}(u) + d^{-}(v) + d^{-}(w) = 2 + 1 + 0 = 3.$$

Суми півстепенів входу та виходу рівні та дорівнюють числу дуг графа q.

Список рекомендованої літератури

1. Бардачов, Ю.М. Дискретна математика. Підручник / Ю.М. Бардачов, Н.А. Соколова, В.Е. Ходаков. – 2-ге вид., переробл. і допов. – Київ: Вища школа, 2007. – 383 с.

2. Борисенко, О.А. Дискретна математика : підручник для студентів вищих навчальних закладів / О.А. Борисенко. – Суми : Університетська книга, 2019. – 255 с.

3. Джалладова, І.А. Дискретна математика: навч. посіб. / І.А. Джалладова, О.Д. Шарапов. – Київ: КНЕУ, 2012. – 245 с.

4. Журавчак Л.М. Дискретна математика для програмістів : навч. посіб. / Л.М. Журавчак. – Видавництво Львівської політехніки, 2019. – 420 с.

5. Капітонова, Ю.В. Основи дискретної математики. Підручник / Ю.В. Капітонова, С.Л. Кривий, О.А. Летичевський, Г.М. Луцький, М.К. Печурін. — Київ: Наукова думка, 2002. – 580 с.

6. Матвієнко, М.П. Дискретна математика. Підручник / М.П. Матвієнко. – 2-ге вид., переробл. і допов. — Київ: Видавництво Ліра-К, 2017. – 324 с.

7. Наконечна, Т.В. Дискретна математика. Практикум / Т.В. Наконечна. – Дніпро: Біла К.О., 2019. – 88 с.

8. Нікольський, Ю.В. Дискретна математика : підручник / Ю.В. Нікольський, В.В. Пасічник, Ю.М. Щербина. – 5-те вид., випр. та допов. – Львів : Магнолія-2006, 2019. – 432 с.

Зміст