

**Міністерство освіти і науки України
Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ІЗ КУРСУ
«МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»**

2014

**Міністерство освіти і науки України
Дніпропетровський національний університет
ім. Олеся Гончара**

Кафедра геології та гідрогеології

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНИХ РОБІТ ІЗ КУРСУ
«МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ»**

**Дніпропетровськ
РВВ ДНУ
2014**

Викладено числові методи розв'язання найбільш актуальних гідрогеологічних задач із теоретичним обґрунтуванням і практичними прикладами для фільтрації, масопереносу й вологопереносу.

Для студентів 5-го курсу геолого-географічного факультету ДНУ спеціальності «Гідрогеологія».

Вступ

Математичне моделювання гідрогеологічних процесів засновано на аналітичних і числових методах розв'язання задач фільтрації, масопереносу, вологопереносу й теплопереносу. Аналітичним методам завжди віддається перевага, але вони розроблені для простих гідродинамічних і гідрогеохімічних схем із геометрично правильними контурами. У природних умовах частіше зустрічаються гідрогеологічні структури зі змінними в часі граничними умовами і складними контурами. Задачі з такими початковими даними розв'язують числовими методами. У моделюванні гідрогеологічних процесів застосовують такі числові методи: перетинів, Джонсона і прогонки. Метод перетинів застосовують для розв'язання фільтраційних задач у неусталеному режимі зі змінними граничними умовами. Методом Джонсона розв'язують задачі масопереносу підземними водами в усталеному і неусталеному режимах за явною схемою з урахуванням критерію стійкості і в неявному вигляді. Метод прогонки універсальний і застосовується для всіх видів гідрогеологічних задач – фільтрації, масопереносу, вологопереносу, теплопереносу. Він передбачає зміну крайових умов у просторі й часі. Це велика перевага перед аналітичними методами. Усі розглянуті задачі актуальні за постановкою проблеми й оригінальні за розв'язанням.

Кожний розділ закінчується контрольними питаннями і завданнями, що дозволяє студенту самостійно провести перевірку засвоєних знань.

Лабораторна робота 1. Метод перетинів

Цей метод застосовують, коли фільтраційна задача не має аналітичного розв'язання.

Постановка задачі

- Розв'язати фільтраційну задачу в неусталеному режимі зі змінними граничними умовами за варіантами, застосовуючи метод перетинів.
- Теоретично обґрунтувати метод перетинів.
- Визначити величину інфільтраційного живлення за даними режимних спостережень.

Теоретичні відомості

Процес руху підземних вод у одновимірному варіанті для неусталеного режиму фільтрації описують рівнянням другого порядку в частинних похідних еліптичного типу такого вигляду:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{W}{T} + \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (1.1)$$

де H – гідродинамічний напір, м; W – інфільтраційне живлення, м/добу; T – водопровідність, м²/добу; a – коефіцієнт рівнепровідності, м²/добу; x – просторова координата, м; t – часова координата, діб.

Рівняння (1.1) правдиве для безнапірного потоку. У напірних умовах використовують коефіцієнт п'єзопровідності a^* замість рівнепровідності a . Для по-

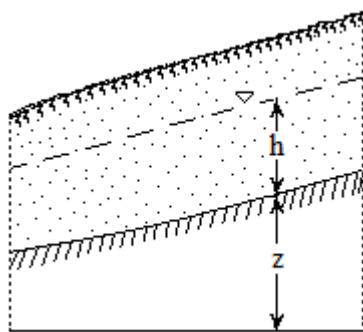
хилого водотриву (рис. 1.1)

$$H = h + z, \quad (1.2)$$

де h – потужність безнапірного водоносного горизонту, м;

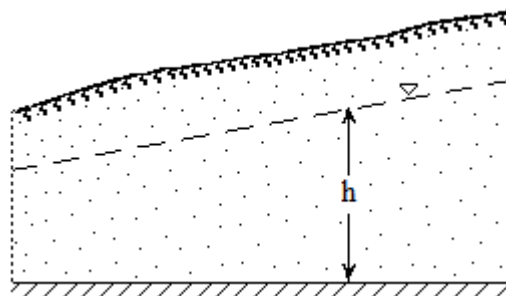
z – відстань від площини порівняння до покрівлі водотриву, м.

Якщо водотрив горизонтальний, то площину порівняння вибирають за його покрівлею (рис. 1.2).



площина порівняння

Рис. 1.1. Безнапірний потік підземних вод на похилому водотриві



площина порівняння

Рис. 1.2. Безнапірний потік підземних вод на горизонтальному водотриві

Для гідрогеологічних умов, відображених на рис. 1.2, $z = 0$, $H = h$.

Рівняння (1.1) має вигляд

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{W}{T} + \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\text{або } Kh_{cp} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + W = \mu \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (1.4)$$

$$T = Kh_{cp}, \quad \frac{\mu}{T} = \frac{1}{a},$$

де μ – недостача водонасичення, частки одиниць.

Інші позначення наведені раніше.

Виведення розрахункової формули

Рівняння (1.4) записуємо в скінченнорізницевій формі, виходячи із визначення першої і другої похідних. Перша похідна – це межа відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу наближається до нуля (рис. 1.3):

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \lim_{x_{i-1} - x_i \rightarrow 0} \frac{h_{i-1} - h_i}{x_{i-1} - x_i}. \quad (1.5)$$

У скінченнорізницевих методах межі відношень замінюються самими відношеннями, тому метод є наближеним:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{h_{i-1} - h_i}{x_{i-1} - x_i} = \frac{h_{i-1} - h_i}{\Delta x}.$$

Друга похідна – це межа відношення приросту двох перших похідних до приросту аргументу, коли приріст аргументу наближається до нуля.

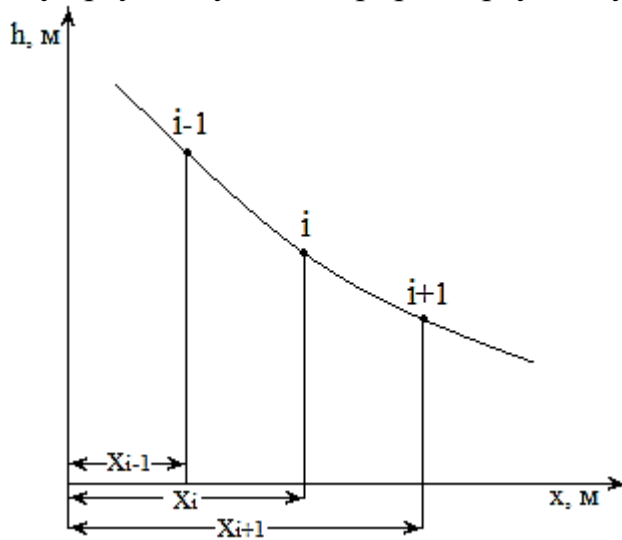


Рис. 1.3. Дискретизація області фільтрації за триточковою схемою

З урахуванням вищезазначеної передумови

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \left(\frac{h_{i-1} - h_i}{\Delta x} - \frac{h_i - h_{i+1}}{\Delta x} \right) : \Delta x = \frac{h_{i-1} - 2h_i + h_{i+1}}{(\Delta x)^2}. \quad (1.6)$$

Часова похідна записується для однієї середньої розрахункової точки h_i на два моменти часу – попередній h_i^τ і наступний $h_i^{\tau+1}$. Рівняння (1.4) у скінченнорізницевої формі має такий вигляд:

$$Kh_{cp} \frac{h_{i-1}^\tau - 2h_i^\tau + h_{i+1}^\tau}{(\Delta x)^2} + W = \mu \frac{h_i^{\tau+1} - h_i^\tau}{\Delta t}, \quad (1.7)$$

де Δt – часовий крок, діб; $\tau, \tau+1$ – індекси попереднього і наступного моментів часу.

Інші позначення наведені раніше.

Рівняння (1.7) записано за явною скінченнорізницевою схемою, має одну невідому функцію $h_i^{\tau+1}$. Воно є алгебричним першого порядку. Його розв'язання для будь-якої кількості розрахункових точок потребує визначення критерію стійкості. Це така величина Δx , за якою не накопичується помилка розрахунку в часі. Усі складові рівняння (1.7) помножимо на Δt , ділимо на μ і запишемо відносно визначення невідомої величини:

$$h_i^{\tau+1} = \frac{Kh_{cp}\Delta t}{\mu(\Delta x)^2} (h_{i-1}^\tau - 2h_i^\tau + h_{i+1}^\tau) + \frac{W\Delta t}{\mu}. \quad (1.8)$$

Для застосування методу перетинів необхідно, щоб

$$\frac{Kh_{cp}\Delta t}{\mu(\Delta x)^2} = 1. \quad (1.9)$$

Це можливо за умовою

$$\Delta x = \sqrt{\frac{Kh_{cp}\Delta t}{\mu}}. \quad (1.10)$$

Вираз (1.10) є критерієм стійкості методу перетинів.

З урахуванням (1.9) формула (1.8) має вигляд

$$h_i^{\tau+1} = h_{i-1}^{\tau} - h_i^{\tau} + h_{i+1}^{\tau} + \frac{W\Delta t}{\mu}. \quad (1.11)$$

Записуємо функції у вигляді

$$h_i^{\tau} = \frac{h_{i-1}^{\tau} + h_{i+1}^{\tau}}{2}, \quad h_{i-1}^{\tau} + h_{i+1}^{\tau} = \frac{(h_{i-1}^{\tau} + h_{i+1}^{\tau})2}{2}. \quad (1.12)$$

Знаходимо різницю

$$h_{i+1}^{\tau} = \frac{(h_{i-1}^{\tau} + h_{i+1}^{\tau})2}{2} - \frac{(h_{i-1}^{\tau} + h_{i-1}^{\tau})}{2} = \frac{h_{i-1}^{\tau} + h_{i+1}^{\tau}}{2}. \quad (1.13)$$

З урахуванням (1.12) і (1.13) кінцева формула методу перетинів має вигляд

$$h_i^{\tau+1} = \frac{h_{i-1}^{\tau} + h_{i+1}^{\tau}}{2} + \frac{W\Delta t}{\mu}. \quad (1.14)$$

Усі позначення наведені раніше.

Приклад розв'язання задачі методом перетинів

Формулювання задачі. Розрахувати зміни рівня ґрунтових вод у свердловинах 81 – 84 (рис. 1.4) під впливом коливань рівня у водосховищі. Вихідні дані наведені в табл. 1.1 і 1.2.

Таблиця 1.1

Вихідні дані

Перетин	Відстань від перетину до водосховища, м	Потужність водоносного горизонту, м на 9.06	Коефіцієнт водовіддачі, μ , ч.о	Часовий крок Δt , діб	Інфільтраційне живлення W , м/добу	Строк прогнозного розрахунку t , діб	Коефіцієнт фільтрації K , м/добу
Водосховище	0	10,62	0,06	10	$3,1 \cdot 10^{-5}$	30	5,4
Свердловини	81	100	10,84	—	—	—	—
	82	400	11,14	—	—	—	—
	83	700	11,49	—	—	—	—
	84	1200	11,67	—	—	—	—

Таблиця 1.2

Водний режим водосховища

Дата	Відмітка горизонту води у водосховищі, м
9.06	10,62
19.06	10,10
29.06	9,51
9.07	9,15

Закінчення табл. 1.2

Дата	Відмітка горизонту води у водосховищі, м
19.07	8,87
29.07	8,85
9.08	6,65

Рівень води у водосховищі постійно знижується.

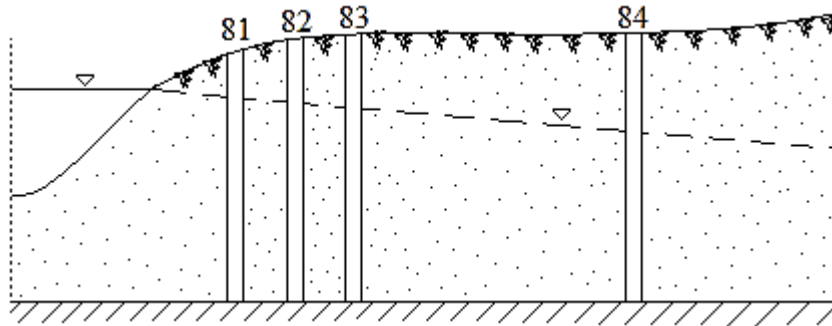


Рис. 1.4. Створ спостережних свердловин

Послідовність розв'язання задачі.

1. Розраховуємо середню потужність водоносного горизонту h_{cp} за даними табл. 1.1:

$$h_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^{i=5} h_i}{5} = \frac{10,62 + 10,84 + 11,14 + 11,49 + 11,67}{5} = 11,15 \text{ м.}$$

2. Знаходимо критерій стійкості за формулою (1.10):

$$\Delta x = \sqrt{\frac{Kh_{cp}\Delta t}{\mu}} = \sqrt{\frac{5,4 \cdot 11,5 \cdot 10}{0,06}} = 100,17 \text{ м.}$$

Згідно з критерієм стійкості Δx – відстань між розрахунковими перетинами повинна бути такою:

$$\Delta x \leq 100,17 \text{ м.} \quad (1.15)$$

Кількість свердловин і відстані між ними не відповідають умові (1.15). Беремо $\Delta x = 100$ м і розраховуємо потужність водоносного горизонту в додаткових перетинах за формулою

$$h_x = \sqrt{h_1^2 - \frac{h_1^2 - h_2^2}{L_{1-2}} x}, \quad (1.16)$$

де h_x – потужність водоносного горизонту в невідомому перетині, м; h_1, h_2 – потужність водоносного горизонту у двох відомих перетинах, м; x – відстань від першого відомого перетину до невідомого, м.

$$h_2 = \sqrt{10,84^2 - \frac{10,84^2 - 11,14^2}{300} \cdot 100} = 10,94 \text{ м.}$$

Результати розрахунків записуємо в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Результати розрахунків прогнозу рівневого режиму

№ перетинів	№ свердловини	Відстань від перетинів до водосховища, м	Дата									
			9.06	19.06	29.06	9.07	19.07					
			Потужність водоносного горизонту у перетинах									
			Не-парні	Парні	Не-парні	Парні	Не-парні	Парні	Не-парні	Парні		
Вдсх. 0		0		10,62		10,10		9,51		9,15		8,87
1	81	100	10,84		10,52		10,22		9,96		9,75	
2		200		10,94		10,94		10,78		10,63		10,46
3		300	11,04		11,04		11,04		10,96		10,89	
4	82	400		11,14		11,15		11,14		11,15		11,1
5		500	11,26		11,25		11,26		11,24		11,25	
6		600		11,37		11,37		11,35		11,35		11,33
7	83	700	11,49		11,45		11,44		11,42		11,42	
8		800		11,53		11,52		11,5		11,49		11,48
9		900	11,56		11,56		11,55		11,54		11,53	
10		1000		11,59		11,59		11,59		11,58		11,57
11		1100	11,63		11,63		11,62		11,61		11,60	
12	84	1200		11,67		11,65		11,64		11,63		11,62

Для перетину 1 розрахунок $h^{\tau+1}$ виконують за формулою

$$h_1^{\tau+1} = \frac{h_0^{\tau+1} + h_2^{\tau}}{2} + \frac{W\Delta t}{\mu}, \quad h_1^{19.06} = \frac{h_0^{19.06} + h_2^{9.06}}{2} + \frac{W\Delta t}{\mu}, \quad (1.17)$$

де $h_0^{\tau+1}$ – відмітка горизонту води у водосховищі відносно водотриву на наступний момент часу, м; $h_1^{\tau+1}$ – потужність водоносного горизонту в перетині 1 на наступний момент часу, м; h_2^{τ} – потужність водоносного горизонту в перетині 2 на попередній момент часу, м.

$$h_1^{19.06} = \frac{10,10 + 10,94}{2} + \frac{3,1 \cdot 10^{-5} \cdot 10}{0,06} = 10,52.$$

Для всіх інших перетинів розрахунків виконують за формулою (1.14). За результатами розрахунків будують графік (рис. 1.5) залежності потужності водоносного горизонту від зміни рівня води у водосховищі. За графіком визначають довжину зони впливу водосховища на гідрогеологічний режим прилеглих територій.

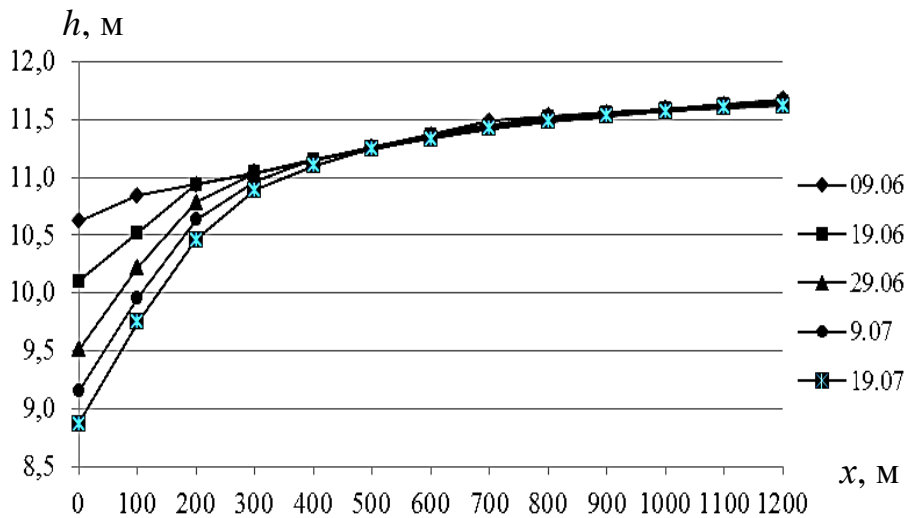


Рис. 1.5. Визначення зони впливу водосховища на прилеглі території

Для визначення інфільтраційного живлення використовуємо режимні спостереження (табл. 1.4).

Таблиця 1.4

Результати режимних спостережень

№ свердловини	Потужність водоносного горизонту на $1.06 h_1^\tau$, м	Потужність водоносного горизонту на $1.07 h_1^{\tau+1}$, м	Коефіцієнт фільтрації K , м/добу	Коефіцієнт нестачі насичення μ , частки одиниці	Відстань між свердловинами Δx , м
1	4,0	4,3	0,9	0,06	100 200
2	4,2	4,7	1,2	—	
3	4,5	4,9	1,3	—	

Гідрогеологічним умовам, наведеним у табл. 1.4, відповідає таке рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial h}{\partial x} \right) + W = \mu \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (1.18)$$

Усі позначення наведені раніше.

У скінченнорізницькій формі за явною схемою в загальному вигляді рівняння (1.18) записують таким чином:

$$\left[\frac{K_{i-1} + K_i}{2} \cdot \frac{h_{i-1}^\tau + h_i^\tau}{2} \cdot \frac{h_{i-1}^\tau - h_i^\tau}{\Delta x_{i-1,i}} - \frac{K_i + K_{i+1}}{2} \cdot \frac{h_i^\tau + h_{i+1}^\tau}{2} \cdot \frac{h_i^\tau - h_{i+1}^\tau}{\Delta x_{i,i+1}} \right] \cdot \frac{\Delta x_{i,i-1} + \Delta x_{i,i+1}}{2} + W = \mu \frac{h_i^{\tau+1} - h_i^\tau}{\Delta t}. \quad (1.19)$$

Для розрахункових свердловин 1, 2, 3:

$$\left[\frac{K_1+K_2}{2} \cdot \frac{h_1^t+h_2^t}{2} \cdot \frac{h_1^t-h_2^t}{\Delta x_1} - \frac{K_2+K_3}{2} \cdot \frac{h_2^t+h_3^t}{2} \cdot \frac{h_2^t-h_3^t}{\Delta x_2} \right] \cdot \frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{2} + W = \mu \frac{h_2^{t+1}-h_2^t}{\Delta t}. \quad (1.20)$$

Розв'язуємо (1.20) відносно W :

$$W = - \left[\frac{K_1+K_2}{2} \cdot \frac{h_1^t+h_2^t}{2} \cdot \frac{h_1^t-h_2^t}{\Delta x_1} - \frac{K_2+K_3}{2} \cdot \frac{h_2^t+h_3^t}{2} \cdot \frac{h_2^t-h_3^t}{\Delta x_2} \right] \cdot \frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{2} + \mu \frac{h_2^{t+1}-h_2^t}{\Delta t}. \quad (1.21)$$

У рівняння (1.21) заносимо результати режимних спостережень і інші величини (табл. 1.4) і розраховуємо величину інфільтраційного живлення:

$$W = - \left[\frac{0,9+1,2}{2} \cdot \frac{4,0+4,2}{2} \cdot \frac{4,0-4,2}{100} - \frac{1,2+1,3}{2} \cdot \frac{4,2-4,5}{2} \cdot \frac{4,2-4,5}{120} \right] \cdot \frac{100+120}{2} + 0,06 \cdot \frac{4,7-4,2}{30} = 0,00095.$$

Вперше така задача була розв'язана І.А. Скабаллановичем [1].

Таблиця 1.5

Варіанти завдань до лабораторної роботи

Варіант 1				
Перетин	№ свердловини	Відстань до водосховища, м	Потужність водоносного горизонту, м	Параметри
Водосховище	–	0	16,2	$\mu = 0,06$ $K_\phi = 3,6$ м/добу Абс. відм. водотриву 41,1 м
Свердловини	46	100	17,3	
	47	400	18,7	
	48	700	19,0	
	49	1200	20,2	
Варіант 2				
Водосховище	–	0	21,7	$\mu = 0,07$ $K_\phi = 2,5$ м/добу Абс. відм. водотриву 40,9 м
Свердловини	86	100	22,8	
	87	400	24,2	
	88	700	25,5	
	89	1200	26,7	
Варіант 3				
Водосховище	–	0	22,2	$\mu = 0,06$ $K_\phi = 2,4$ м/добу Абс. відм. водотриву 39,7 м
Свердловини	90	100	23,3	
	91	400	24,7	
	92	700	25,0	
	93	1200	26,2	

Варіанти завдань до лабораторної роботи

Варіант 4				
Перетин	№ свердловини	Відстань до водосховища, м	Потужність водоносного горизонту, м	Параметри
Водосховище	–	0	20,2	$\mu = 0,055$ $K_{\phi} = 2,8$ м/добу Абс. відм. водотриву 54,1 м
Свердловини	74	100	21,3	
	75	400	22,7	
	76	700	23,0	
	77	1200	24,2	
Варіант 5				
Водосховище	–	0	24,2	$\mu = 0,045$ $K_{\phi} = 2,0$ м/добу Абс. відм. водотриву 46,5 м
Свердловини	106	100	25,3	
	107	400	26,7	
	108	700	27,0	
	109	1200	28,2	

Контрольні завдання і запитання

1. Записати рівняння (1.1), (1.3), (1.4), (1.7), (1.8), (1.11), (1.14), (1.17), (1.18) для умов відсутності інфільтраційного живлення.
2. У якому випадку інфільтраційне живлення має знак «мінус»?
3. Запишіть рівняння (1.1), (1.3), (1.4), (1.7), (1.18) за неявною скінченнорізницевою схемою.
4. Яку назву має гідрогеологічна задача, у якій визначають функцію $h_i^{\tau+1}$?
5. Виконати прогноз рівневого режиму на 29.07 і 9.08 за методом перетинів.
6. Яку назву має гідрогеологічна задача, у якій розраховують інфільтраційне живлення?
7. Чому скінченнорізницькі методи є наближені?
8. У яких випадках застосовують скінченнорізницькі методи?

Лабораторна робота 2. Метод Джонсона

Метод Джонсона застосовують для розв'язання всіх видів гідрогеологічних задач, пов'язаних із перенесенням речовини в підземних водах і зоні аерації. Перш за все це актуальні задачі вторинного засолення ґрунтів і порід зони аерації в умовах зрошення й рекультивації земель, забруднення водоносних горизонтів скидними шахтними водами в гірничовидобувних регіонах.

Постановка задачі

- Виконати прогноз сольового режиму зрошуваних земель методом Джонсона.
- Для точності прогнозу сольового режиму розрахувати критерії стійкості.
- За результатами розрахунку лабораторної роботи надати характеристику динаміки розсолоння ґрунтів зони аерації в часі.

Теоретичні відомості

Скінченнорізницеве відображення рівняння масопереносу

Згідно з теорією фізико-хімічної гідродинаміки пористих середовищ процеси переносу речовини в зоні аерації та підземних водах описують рівняннями руху і збереження маси речовини вигляду

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} = m \frac{\partial c}{\partial t}. \quad (2.1)$$

Рівняння (2.1) має однаковий математичний опис для зони аерації та повного водонасичення, але його складові мають різне фізичне визначення.

У рівнянні (2.1) прийняті такі позначення:

D – коефіцієнт гідродисперсії, комплексний узагальнений параметр, який враховує всі фактори розсіювання речовини, супутні фільтрації в зоні повного водонасичення та інфільтрації в зоні аерації, м²/добу;

C – мінералізація підземних вод у області фільтрації, г/дм³ або засоленість порід у зоні аерації, %;

V – швидкість фільтрації або вологопереносу, м/добу;

m – активна пористість у області фільтрації та об'ємна вологість у зоні аерації, частки одиниці;

x – просторова координата, м;

t – часова координата, дб.

Для застосування методу Джонсона всі складові рівняння (2.1) поділяємо на D :

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - P \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{m}{D} \cdot \frac{\partial c}{\partial t}, \quad P = \frac{V}{D}. \quad (2.2)$$

Записуємо (2.2) за класичною скінченнорізницевою формою

$$\frac{C_{i-1}^\tau - 2C_i^\tau + 2C_{i+1}^\tau}{(\Delta x)^2} - P \frac{C_{i-1}^\tau - C_{i+1}^\tau}{2\Delta x} = \frac{m}{D} \cdot \frac{C_i^{\tau+1} - C_i^\tau}{\Delta t}. \quad (2.3)$$

Відокремлюємо кожен складову з їх коефіцієнтами:

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} C_{i-1}^\tau - \frac{1}{(\Delta x)^2} C_i^\tau - \frac{1}{(\Delta x)^2} C_i^\tau + \frac{1}{(\Delta x)^2} C_{i+1}^\tau - \frac{P}{2\Delta x} C_{i-1}^\tau + \frac{P}{2\Delta x} C_{i+1}^\tau = \frac{m}{D} \cdot \frac{C_i^{\tau+1} - C_i^\tau}{\Delta t}. \quad (2.4)$$

У лівій частині рівняння (2.4) додаємо і віднімаємо $\frac{P}{2\Delta x} C_i^\tau$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\Delta x)^2} C_{i-1}^\tau - \frac{1}{(\Delta x)^2} C_i^\tau - \frac{1}{(\Delta x)^2} C_i^\tau + \frac{1}{(\Delta x)^2} C_{i+1}^\tau - \frac{P}{2\Delta x} C_{i-1}^\tau + \frac{P}{2\Delta x} C_{i+1}^\tau + \\ + \frac{P}{2\Delta x} C_i^\tau - \frac{P}{2\Delta x} C_i^\tau = \frac{m}{D} \cdot \frac{C_i^{\tau+1} - C_i^\tau}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рівняння (2.5) перетворюємо таким чином:

$$C_{i-1}^{\tau} \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x} \right) - C_i^{\tau} \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x} \right) - C_i^{\tau} \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x} \right) + C_{i+1}^{\tau} \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x} \right) = \frac{m}{D} \cdot \frac{C_i^{\tau+1} - C_i^{\tau}}{\Delta t} \quad (2.6)$$

$$\left(C_{i-1}^{\tau} - C_i^{\tau} \right) \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x} \right) - \left(C_i^{\tau} - C_{i+1}^{\tau} \right) \left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x} \right) = \frac{m}{D} \cdot \frac{C_i^{\tau+1} - C_i^{\tau}}{\Delta t} \quad (2.7)$$

Записуємо (2.7) у вигляді дробу

$$\frac{\frac{C_{i-1}^{\tau} - C_i^{\tau}}{1} - \frac{C_i^{\tau} - C_{i+1}^{\tau}}{1}}{\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x}} = \frac{m}{D} \cdot \frac{C_i^{\tau+1} - C_i^{\tau}}{\Delta t}$$

і розв'язуємо відносно невідомої величини $C_i^{\tau+1}$

$$C_i^{\tau+1} = \frac{(C_{i-1}^{\tau} - C_i^{\tau})D\Delta t}{\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x}} - \frac{(C_i^{\tau} - C_{i+1}^{\tau})D\Delta t}{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}} + C_i^{\tau} \quad (2.8)$$

Формулу (2.8) застосовують для прогнозу сольового режиму зрошуваних земель для низхідного сумарного потоку вологи і солей (рис. 2.1).

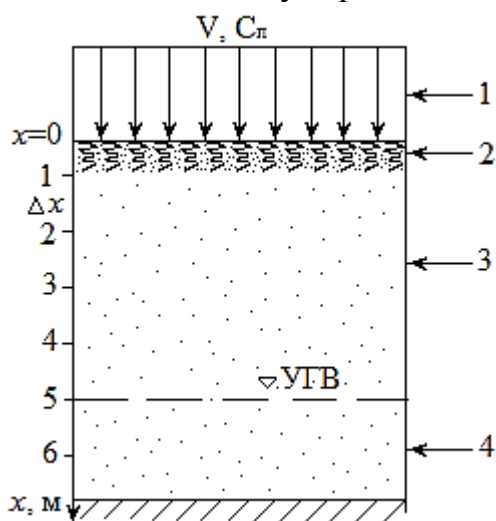


Рис. 2.1. Схема області солепереносу:

1 – водоподача на поверхню землі $x = 0$;

2 – ґрунтовий шар; 3 – зона аерації;

4 – зона повного водонасичення

Для розв'язання таких задач вертикальний солеперенос подаємо як сукупність розрахункових точок, у нашому прикладі $0 \div 6$. На верхній границі досліджуваної області солепереносу $x = 0$, утворюється гранична умова III роду, Данквертса-Бреннера

$$V(C_{\text{п}} - C_0) = D \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (2.9)$$

де V – швидкість вертикального вологопереносу, м/добу;

$C_{\text{п}}$ – мінералізація поливної води, г/дм³, %.

Представляємо (2.9) у скінченнорізницевій формі для розрахункових точок 0, 1:

$$V(C_{\pi} - C_0) = D \frac{C_0 - C_1}{\Delta x}. \quad (2.10)$$

У формулах (2.3 – 2.10) застосовані такі позначення:

Δx – відстань між розрахунковими точками, м;

Δt – крок за часовою координатою, діб;

$i-1, i, i+1$ – просторовий індекс розрахункової точки;

$\tau, \tau+1$ – часовий індекс розрахункової точки.

Запишемо рівняння (2.8) для розрахункових точок 0, 1, 2.

$$C_1^{\tau+1} = \frac{(C_0^{\tau} - C_1^{\tau})D\Delta t}{m} - \frac{(C_1^{\tau} - C_2^{\tau})D\Delta t}{m} + C_1^{\tau}. \quad (2.11)$$

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x} \quad \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}$$

Виконуємо узгодження рівняння (2.11) із граничною умовою (2.10). Для цього ліву і праву частини рівняння (2.10) множимо на Δx , Δt , ділимо на m . Тоді (2.10) набуває вигляду

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x} \quad V\Delta x\Delta t(C_{\pi}^{\tau} - C_0^{\tau}) = \frac{(C_0^{\tau} - C_{\pi}^{\tau})D\Delta t}{m} \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x} \quad \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}$$

У рівняння (2.11) замість першої складової правої частини підставляємо ліву частину умови (2.12) й одержуємо кінцеву формулу для розрахунку прогнозної засоленості в розрахунковій точці на наступний час через Δt діб.

$$C_1^{\tau+1} = \frac{V\Delta x\Delta t(C_{\pi}^{\tau} - C_0^{\tau})}{m} - \frac{(C_1^{\tau} - C_2^{\tau})D\Delta t}{m} + C_1^{\tau}. \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x} \quad \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}$$

Розрахункова точка 2 не є гранична, тому формула розрахунку прогнозної засоленості ідентична (2.11)

$$C_2^{\tau+1} = \frac{(C_1^{\tau} - C_2^{\tau})D\Delta t}{m} - \frac{(C_2^{\tau} - C_3^{\tau})D\Delta t}{m} + C_2^{\tau}. \quad (2.14)$$

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x} \quad \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}$$

Аналогічно (2.14) записуємо формули для розрахунку солепереносу, для всіх інших розрахункових точок. Для явної схеми, для якої застосований метод Джонсона, величини Δx і Δt розраховують за критеріями стійкості:

$$\Delta x \leq \frac{2D}{V}, \quad \Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2D}. \quad (2.15)$$

Точність прогнозного розрахунку визначається не тільки виконанням критерію стійкості, але й співвідношенням розрахункових параметрів та початкових даних. Найбільші похибки характерні для високого засолення.

Приклад розв'язання задачі

Формулювання задачі. Виконати прогноз сольового режиму зрошуваних земель за початковими даними (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Початкові дані

Атмосферні опади А, мм	Зрошувальна норма О, мм	Сумарне випарування (В+Т), мм	Мінералізація опадів $C_{оп}$, г/дм ³	Мінералізація зрошуваної води $C_{п}$, %	Мінералізація ґрунтових вод $C_{г}$, %	Потужність зони аерації h, м	Щільність сухоґрунту ρ , г/см ³	Початкове засолення C_i^r , %	Об'ємна вологість m, ч.о	Строк прогнозу, t, діб
479	614	601	0,1	0,01	0,2	2,5	1,71	1	0,23	250

Послідовність розв'язання задачі:

1. Розрахуємо швидкість вертикального вологопереносу балансовим методом:

$$V = \frac{A + O - (B + T)}{1000 \cdot 365} = \frac{479 + 614 - 601}{1000 \cdot 365} = 0,0013 \text{ м/добу.}$$

2. Знайдемо фактичну мінералізацію (г/дм³):

$$C_{п} \left(\text{г/дм}^3 \right) = \frac{C_{п}(\%) \cdot 1000 \cdot \rho \left(\text{г/см}^3 \right)}{m \cdot 100} = \frac{0,01 \cdot 1000 \cdot 1,71}{0,23 \cdot 100} = 0,74 \text{ г/дм}^3,$$

$$C_{г} \left(\text{г/дм}^3 \right) = \frac{C_{г}(\%) \cdot 1000 \cdot \rho \left(\text{г/см}^3 \right)}{m \cdot 100} = \frac{0,2 \cdot 1000 \cdot 1,71}{0,23 \cdot 100} = 14,87 \text{ г/дм}^3.$$

3. Розрахуємо коефіцієнт гідродисперсії за формулою С.Ф. Авер'янова:

$$D = \frac{Vh}{2 \ln \frac{C_{г}}{C_{п}}} = \frac{0,0013 \cdot 2,5}{2 \ln \frac{14,87}{0,74}} = 0,0005 \text{ м}^2/\text{доб.}$$

4. Визначимо критерії стійкості за формулами (2.15):

$$\Delta x \leq \frac{2D}{V}, \quad \Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2D},$$

$$\Delta x \leq \frac{2 \cdot 0,0005}{0,0013}, \quad \Delta x \leq 0,77.$$

Виходячи із потужності зони аерації h = 2,5 м виберемо $\Delta x = 0,5$ м, тоді

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2D} \leq \frac{0,5^2}{2 \cdot 0,0005} = 250 \text{ діб.}$$

5. Виконаємо розрахунок $C_1^{\tau+1}$ за формулою (2.13) і $C_2^{\tau+1}$, $C_3^{\tau+1}$, $C_4^{\tau+1}$, $C_5^{\tau+1}$, за формулами, аналогічними (2.14):

$$C_1^{\tau+1} = \frac{V\Delta x\Delta t(C_1^{\tau} - C_0^{\tau})}{m} - \frac{(C_1^{\tau} - C_2^{\tau})D\Delta t}{m} + C_1^{\tau},$$

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x} \quad \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}$$

$$C_1^{\tau+1} = \frac{0,0013 \cdot 0,5 \cdot 250(0,01 - 1)}{0,23} - \frac{(1-1)0,0005 \cdot 250}{0,23} + 1 = 0,5\%,$$

$$\frac{1}{0,5^2} - \frac{2,6}{2 \cdot 0,5} \quad \frac{1}{0,5^2} + \frac{2,6}{2 \cdot 0,5}$$

$$C_2^{\tau+1} = \frac{(C_1^{\tau} - C_2^{\tau})D\Delta t}{m} - \frac{(C_2^{\tau} - C_3^{\tau})D\Delta t}{m} + C_2^{\tau},$$

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x} \quad \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}$$

$$C_2^{\tau+1} = \frac{(1-1)0,0005 \cdot 250}{0,23} - \frac{(1-1)0,0005 \cdot 250}{0,23} + 1 = 1\%,$$

$$\frac{1}{0,5^2} - \frac{2,6}{2 \cdot 0,5} \quad \frac{1}{0,5^2} + \frac{2,6}{2 \cdot 0,5}$$

$$C_3^{\tau+1} = \frac{(C_2^{\tau} - C_3^{\tau})D\Delta t}{m} - \frac{(C_3^{\tau} - C_4^{\tau})D\Delta t}{m} + C_3^{\tau},$$

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x} \quad \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}$$

$$C_3^{\tau+1} = \frac{(1-1)0,0005 \cdot 250}{0,23} - \frac{(1-1)0,0005 \cdot 250}{0,23} + 1 = 1\%,$$

$$\frac{1}{0,5^2} - \frac{2,6}{2 \cdot 0,5} \quad \frac{1}{0,5^2} + \frac{2,6}{2 \cdot 0,5}$$

$$C_4^{\tau+1} = \frac{(C_3^{\tau} - C_4^{\tau})D\Delta t}{m} - \frac{(C_4^{\tau} - C_5^{\tau})D\Delta t}{m} + C_4^{\tau},$$

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x} \quad \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}$$

$$C_4^{\tau+1} = \frac{(1-1)0,0005 \cdot 250}{0,23} - \frac{(1-1)0,0005 \cdot 250}{0,23} + 1 = 1\%,$$

$$\frac{1}{0,5^2} - \frac{2,6}{2 \cdot 0,5} \quad \frac{1}{0,5^2} + \frac{2,6}{2 \cdot 0,5}$$

$$C_5^{\tau+1} = \frac{(C_4^{\tau} - C_5^{\tau})D\Delta t}{\frac{1}{(\Delta x)^2} - \frac{P}{2\Delta x}} - \frac{(C_5^{\tau} - C_4^{\tau})D\Delta t}{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{P}{2\Delta x}} + C_5^{\tau},$$

$$C_5^{\tau+1} = \frac{(1-1)0,0005 \cdot 250}{\frac{1}{0,5^2} - \frac{2,6}{2 \cdot 0,5}} - \frac{(1-0,2)0,0005 \cdot 250}{\frac{1}{0,5^2} + \frac{2,6}{2 \cdot 0,5}} + 1 = 0,93\%.$$

6. Розрахуємо засоленість на поверхні землі $x = 0$ за формулою

$$C_0^{\tau+1} = \frac{C_1^{\tau+1} + \frac{\Delta x VC_{\Pi}}{D}}{\frac{V\Delta x}{D} + 1}. \quad (2.16)$$

$$C_0^{\tau+1} = \frac{0,50 + \frac{0,5 \cdot 0,0013 \cdot 0,01}{0,0005}}{\frac{0,0013 \cdot 0,5}{0,0005} + 1} = 0,22\%.$$

7. Розрахунок прогнозного засолення для $C_i^{\tau+2}$, $C_i^{\tau+3}$, $C_i^{\tau+4}$, $C_i^{\tau+5}$, $C_i^{\tau+6}$, $C_i^{\tau+7}$ виконаємо аналогічно $C_i^{\tau+1}$.

8. Результати розрахунків запишемо в табл. 2.2 і відобразимо на рис. 2.2.

Таблиця 2.2

Результати розрахунків засоленості ґрунтів зони аерації

№ розрахункової точки	Відстань від поверхні землі, м	Початкове засолення C_i^{τ} , %	Прогнозне засолення, %						
			$C_i^{\tau+1}$ (x діб)	$C_i^{\tau+2}$ (... діб)	$C_i^{\tau+3}$ (... діб)	$C_i^{\tau+4}$ (... діб)	$C_i^{\tau+5}$ (... діб)	$C_i^{\tau+6}$ (... діб)	$C_i^{\tau+7}$ (... діб)
0	0	1	0,22	0,19	0,17	0,14	0,12	0,10	0,09
1	0,5	1	0,50	0,43	0,37	0,31	0,26	0,22	0,19
2	1,0	1	1	0,80	0,67	0,57	0,49	0,42	0,36
3	1,5	1	1	1	0,92	0,83	0,74	0,66	0,58
4	2,0	1	1	0,99	0,98	0,95	0,89	0,83	0,76
5	2,5	1	0,93	0,89	0,87	0,86	0,84	0,81	0,77

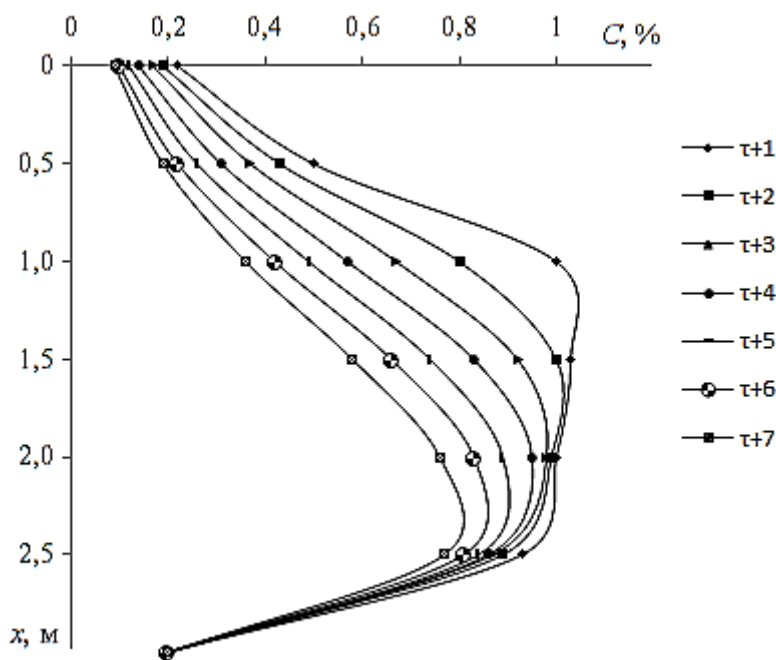


Рис. 2.2. Визначення потужності зони розсолонення

У висновку подається характеристика динаміки розсолонення ґрунтів зони аерації в часі.

Таблиця 2.3

Варіанти завдань до лабораторної роботи

№ завдання	Атмосферні опади А, мм	Зрошувальна норма О, мм	Сумарне випарування (В+Т), мм	Мінералізація зрошуваної води C_3 , г/дм ³	Мінералізація підземних вод $C_г$, г/дм ³	Потужність зони аерації h, м
1	390	500	604	2,3	15,2	4,0
2	478	310	561	1,9	10	— —
3	445	285	566	1,8	20	— —
4	443	315	572	1,7	11	— —
5	451	250	503	1,6	19	— —
6	432	295	502	1,5	12	— —
7	442	355	561	1,4	18	— —
8	450	295	520	1,3	13	— —
9	464	275	545	1,2	17	— —
10	469	300	570	1,1	14	— —

Контрольні завдання і запитання

1. Записати рівняння (2.3) – (2.8) за неявною схемою.
2. Рівняння (2.1) – (2.2) записати в усталеному режимі.
3. За якими формулами крім (2.17) можна визначити коефіцієнт гідродисперсії D ?
4. Яким методом окрім балансового визначається швидкість вертикального вологопереносу?
5. Які переваги має метод Джонсона перед аналітичними розрахунками?

6. Вивести формулу розрахунку для висхідного потоку вологи і солей.
7. Як збільшити точність скінченнорізницевої схеми?

Лабораторна робота 3. Метод прогонки

Постановка задачі

- За варіантами завдань розв'язати гідрогеологічну задачу, застосовуючи метод прогонки.
- Визначити гідродинамічні напори в межиріччі через 50 м методом прогонки й побудувати депресійну поверхню.
- Розглянути всі три варіанти розв'язання задачі фільтрації, масопереносу та вологопереносу методом прогонки.

Теоретичні відомості

Для застосування методу прогонки диференціальні рівняння другого порядку, якими описуються гідрогеологічні процеси, записують у скінченних різницях і зводять до вигляду

$$A_i Y_{i-1} - K_i Y_i + B_i Y_{i+1} = -F_i \quad i=1,2,\dots; A_i \neq 0, B_i \neq 0, \quad (3.1)$$

Рівняння (3.1) містить три невідомі функції Y_{i-1}, Y_i, Y_{i+1} .

Його розв'язання виконують шляхом зведення до трьох рівнянь, які називаються рекурентними чи послідовними співвідношеннями і є властивістю лінійних рівнянь

$$Y_i = \alpha_{i+1} Y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad (3.2)$$

$$Y_{i-1} = \alpha_i Y_i + \beta_i, \quad (3.3)$$

$$Y_{i+1} = \alpha_{i+2} Y_{i+2} + \beta_{i+2} \quad . \quad (3.4)$$

Підставимо в рівняння (3.1) вираз (3.3):

$$A_i \alpha_i Y_i + A_i \beta_i - K_i Y_i + B_i Y_{i+1} = -F_i. \quad (3.5)$$

Підставимо в рівняння (3.5) співвідношення (3.2):

$$A_i \alpha_i \alpha_{i+1} Y_{i+1} + A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i - K_i \alpha_{i+1} Y_{i+1} - K_i \beta_{i+1} + B_i Y_{i+1} = -F_i. \quad (3.6)$$

Рівняння (3.6) містить одну невідому функцію Y_{i+1} , але в процесі перетворення з'явилися невідомі коефіцієнти $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \beta_i, \beta_{i+1}$. Для їх визначення запишемо (3.6) у такому вигляді:

$$[(A_i \alpha_i - K_i) \alpha_{i+1} + B_i] Y_{i+1} + A_i \beta_i + (A_i \alpha_i - K_i) \beta_{i+1} + F_i = 0. \quad (3.7)$$

Рівняння (3.7) правдиве для будь-яких значень функції Y_{i+1} , якщо

$$(A_i \alpha_i - K_i) \alpha_{i+1} = 0, \quad A_i \beta_i + (A_i \alpha_i - K_i) \beta_{i+1} + F_i = 0. \quad (3.8)$$

Із (3.8) одержуємо рекурентні формули:

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{K_i - \alpha_i A_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{K_i - \alpha_i A_i}, \quad K_i - \alpha_i A_i \neq 0. \quad (3.9)$$

Перші значення β_i, α_i розраховуємо з умов:

$$\text{якщо } i = 0, \quad Y_0 = \alpha_1 Y_1 + \beta_1, \quad (3.10)$$

$$\text{якщо } i = N, \quad Y_{N-1} = \alpha_N Y_N + \beta_N. \quad (3.11)$$

Критерій стійкості прогонки

$$|K_i| \geq |A_i| + |B_i|, \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.12)$$

Розглянута права прогонка. Розрахунок починається від точки $i = 0$. За лівою прогонкою розрахунок починається від $i = N$.

Приклад розв'язання фільтраційної задачі

Умова задачі. Розрахувати гідродинамічні напори терміном на 1 рік після зміни їх режиму. Рух підземних вод між двома річками (рис. 3.1), границями першого роду, описується рівнянням Фур'є вигляду

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (3.13)$$

де H – гідродинамічний напір у області фільтрації, м;

a – коефіцієнт рівнепровідності, м²/добу;

x – просторова координата, м;

t – часова координата, днів;

H_1, H_2 – гідродинамічні напори в річках, м.

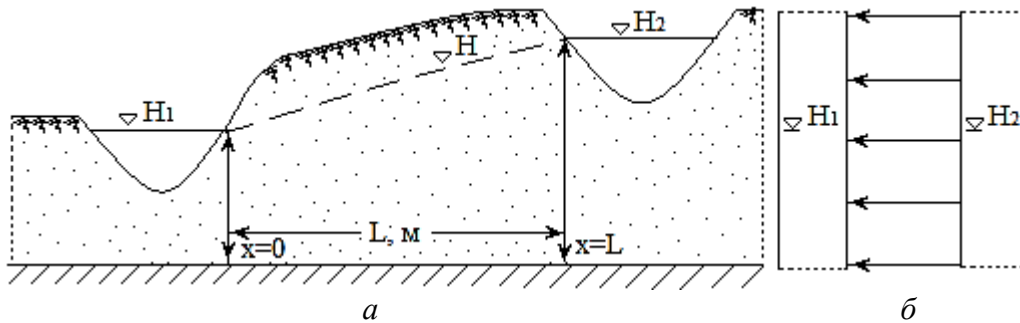


Рис. 3.1. Схема області фільтрації: а – розріз, б – план

Послідовність розв'язання задачі.

1. Запишемо рівняння (3.13) у скінченнорізницевій формі

$$\frac{H_{i-1}^{\tau+1} - 2H_i^{\tau+1} + H_{i+1}^{\tau+1}}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{H_i^{\tau+1} - H_i^{\tau}}{\Delta t} \quad (3.14)$$

і зводимо до вигляду (3.1) таким чином. Множимо всі складові (3.14) на Δt і a й запишемо їх окремо:

$$\frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} H_{i-1}^{\tau+1} - \frac{2a\Delta t}{(\Delta x)^2} H_i^{\tau+1} + \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} H_{i+1}^{\tau+1} = H_i^{\tau+1} - H_i^{\tau}. \quad (3.15)$$

Переносимо $H_i^{\tau+1}$ із правої частини рівняння в ліву й об'єднуємо однакові функції $H_i^{\tau+1}$:

$$\frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} H_{i-1}^{\tau+1} - \left(\frac{2a\Delta t}{(\Delta x)^2} + 1 \right) H_i^{\tau+1} + \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2} H_{i+1}^{\tau+1} = -H_i^{\tau}. \quad (3.16)$$

Із зіставлення (3.1) і (3.16) знаходимо

$$A_i = \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2}, Y_{i-1} = H_{i-1}^{\tau+1}, K_i = \left(\frac{2a\Delta t}{(\Delta x)^2} + 1 \right), Y_i = H_i^{\tau+1},$$

$$B_i = \frac{a\Delta t}{(\Delta x)^2}, Y_{i+1} = H_{i+1}^{\tau+1}, -H_i^{\tau} = -F_i. \quad (3.17)$$

Розрахунки виконуємо за початковими даними (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Початкові дані для розрахунку

Гідродинамічний напір першої річки H_1 , м	Гідродинамічний напір другої річки H_2 , м	Відстань між річками L , м	Відстань між розрахунковими точками Δx , м	Кількість розрахункових точок	Коефіцієнт рівнепровідності a , м ² /добу	Крок у часі Δt , діб	Строк прогнозу t , діб
66,4	68,67	1000	100	10	700	183	366

$$A_i = \frac{700 \cdot 183}{(100)^2} = 12,81,$$

$$K_i = \left(\frac{2 \cdot 700 \cdot 183}{(100)^2} + 1 \right) = 26,62,$$

$$B_i = \frac{700 \cdot 183}{(100)^2} = 12,81.$$

2. Перевіряємо критерій стійкості (3.12)

$$|K_i| \geq |A_i| + |B_i|,$$

$$|26,62| \geq |12,81| + |12,81|,$$

$$|26,62| \geq |25,62|.$$

3. Граничну умову (3.10) записуємо у вигляді

$$H_0 = \alpha_1 H_1 + \beta_1. \quad (3.18)$$

Для границі першого роду $H_0 = H_1$ і $\alpha_1 = 0$. Підставляємо в (3.18) H_0 і H_1 із табл. 3.2:

$$66,4 = 0 \cdot 66,4 + \beta_1$$

і знаходимо $\beta_1 = 66,4$.

4. Розраховуємо наступні коефіцієнти α_{i+1} , β_{i+1} за формулами (3.9) і заносимо в табл. 3.3:

$$\alpha_2 = \frac{B_i}{K_i - \alpha_1 A_i} = \frac{12,81}{26,62 - 0 \cdot 12,81} = 0,48$$

$$\beta_2 = \frac{A_i \beta_1 + F_i}{K_i - \alpha_1 A_i} = \frac{12,81 \cdot 66,4 + 60}{26,62 - 0 \cdot 12,81} = 34,21$$

Послідовність розрахунку зміни рівня підземних вод

№ розрахункових точок	Відстань від річки з напором H_1 , м	Початкові напори H_i^τ , м	α_i	β_i	Прогнозні напори $H_i^{\tau+1}$, м	α_i	β_i	Прогнозні напори $H_i^{\tau+2}$, м
0	0				66,4			66,4
1	100	60	0	66,4	64,36	0	66,4	64,95
2	200	60,1	0,48	34,21	62,82	0,48	34,37	63,70
3	300	60,2	0,62	24,34	62,07	0,62	24,57	63,12
4	400	60,5	0,68	19,92	61,99	0,68	20,17	63,17
5	500	60,6	0,71	17,63	62,49	0,71	17,89	63,78
6	600	60,8	0,73	16,34	63,22	0,73	16,64	64,57
7	700	61,0	0,74	15,64	64,30	0,74	16,00	65,64
8	800	61,2	0,75	15,25	65,40	0,75	15,71	66,57
9	900	61,3	0,753	15,08	66,83	0,753	15,67	67,60
Річка 2 10	1000		0,755	14,99	68,67	0,755	15,76	68,67

Коефіцієнти розраховуємо і для граничної точки 10 із гідродинамічним напором $H_2 = 68,67$ м.

5. Розраховуємо $H_i^{\tau+1}$ за формулами

$$H_9^{\tau+1} = \alpha_{10}H_2 + \beta_{10}, \quad H_8^{\tau+1} = \alpha_9H_9^{\tau+1} + \beta_9 \dots$$

$$H_0^{\tau+1} = \alpha_1H_1^{\tau+1} + \beta_1. \quad (3.19)$$

$$H_9^{\tau+1} = \alpha_{10}H_2 + \beta_{10} = 0,755 \cdot 68,67 + 14,99 = 66,83 \text{ м,}$$

$$H_8^{\tau+1} = \alpha_9H_9 + \beta_9 = 0,753 \cdot 66,83 + 15,08 = 65,40 \text{ м,}$$

$$H_7^{\tau+1} = \alpha_8H_8 + \beta_8 = 0,75 \cdot 65,40 + 15,25 = 64,30 \text{ м,}$$

$$H_6^{\tau+1} = \alpha_7H_7 + \beta_7 = 0,74 \cdot 64,30 + 15,64 = 63,22 \text{ м,}$$

$$H_5^{\tau+1} = \alpha_6H_6 + \beta_6 = 0,73 \cdot 63,22 + 16,34 = 62,49 \text{ м,}$$

$$H_4^{\tau+1} = \alpha_5H_5 + \beta_5 = 0,71 \cdot 62,49 + 17,63 = 61,99 \text{ м,}$$

$$H_3^{\tau+1} = \alpha_4H_4 + \beta_4 = 0,68 \cdot 61,99 + 19,92 = 62,07 \text{ м,}$$

$$H_2^{\tau+1} = \alpha_3H_3 + \beta_3 = 0,62 \cdot 62,07 + 24,34 = 62,82 \text{ м,}$$

$$H_1^{\tau+1} = \alpha_2H_2 + \beta_2 = 0,48 \cdot 62,82 + 34,21 = 64,36 \text{ м,}$$

$$H_0^{\tau+1} = \alpha_1H_1 + \beta_1 = 0 \cdot 64,36 + 66,4 = 66,4 \text{ м.}$$

Для наступного кроку $\tau+2$ початковими даними будуть результати розрахунку на момент часу $\tau+1$. Розрахунок виконують ідентично. За результатами розрахунків будуюмо депресійну поверхню.

$$\begin{aligned}
H_9^{\tau+2} &= \alpha_{10}H_2 + \beta_{10} = 0,755 \cdot 68,67 + 15,76 = 67,60 \text{ м,} \\
H_8^{\tau+2} &= \alpha_9H_9 + \beta_9 = 0,753 \cdot 67,60 + 15,67 = 66,57 \text{ м,} \\
H_7^{\tau+2} &= \alpha_8H_8 + \beta_8 = 0,75 \cdot 66,57 + 15,71 = 65,64 \text{ м,} \\
H_6^{\tau+2} &= \alpha_7H_7 + \beta_7 = 0,74 \cdot 65,64 + 16,00 = 64,57 \text{ м,} \\
H_5^{\tau+2} &= \alpha_6H_6 + \beta_6 = 0,73 \cdot 64,57 + 16,64 = 63,78 \text{ м,} \\
H_4^{\tau+2} &= \alpha_5H_5 + \beta_5 = 0,71 \cdot 63,78 + 17,89 = 63,17 \text{ м,} \\
H_3^{\tau+2} &= \alpha_4H_4 + \beta_4 = 0,68 \cdot 63,17 + 20,17 = 63,12 \text{ м,} \\
H_2^{\tau+2} &= \alpha_3H_3 + \beta_3 = 0,62 \cdot 63,12 + 24,57 = 63,70 \text{ м,} \\
H_1^{\tau+2} &= \alpha_2H_2 + \beta_2 = 0,48 \cdot 63,70 + 34,37 = 64,95 \text{ м,} \\
H_0^{\tau+2} &= \alpha_1H_1 + \beta_1 = 0 \cdot 64,95 + 66,4 = 66,4 \text{ м.}
\end{aligned}$$

Задача масопереносу

Задача масопереносу розглянута в розділі 2, методом прогонки її розв'язують таким чином:

1. Рівняння

$$D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V \frac{\partial c}{\partial x} = m \frac{\partial c}{\partial t} \quad (3.20)$$

записуємо в скінченнорізницевій формі

$$D \frac{C_{i-1}^{\tau+1} - 2C_i^{\tau+1} + C_{i+1}^{\tau+1}}{(\Delta x)^2} - V \frac{C_{i-1}^{\tau+1} - C_i^{\tau+1}}{\Delta x} = m \frac{C_i^{\tau+1} - C_i^{\tau}}{\Delta t} \quad (3.21)$$

і зводимо до вигляду (3.1) таким чином. Усі складові рівняння (3.21) множимо на Δt , ділимо на m і об'єднуємо за просторовими індексами функції $C^{\tau+1}$:

$$\frac{D\Delta t}{m(\Delta x)^2} C_{i-1}^{\tau+1} - \frac{2D\Delta t}{m(\Delta x)^2} C_i^{\tau+1} + \frac{D\Delta t}{m(\Delta x)^2} C_{i+1}^{\tau+1} - \frac{V\Delta t}{m\Delta x} C_{i-1}^{\tau+1} + \frac{V\Delta t}{m\Delta x} C_i^{\tau+1} - C_i^{\tau+1} = -C_i^{\tau}, \quad (3.22)$$

$$\left(\frac{D\Delta t}{m(\Delta x)^2} - \frac{V\Delta t}{m\Delta x} \right) C_{i-1}^{\tau+1} - \left(\frac{2D\Delta t}{m(\Delta x)^2} - \frac{V\Delta t}{m\Delta x} + 1 \right) C_i^{\tau+1} + \frac{D\Delta t}{m(\Delta x)^2} C_{i+1}^{\tau+1} = -C_i^{\tau}. \quad (3.23)$$

2. Записуємо розрахункові формули для коефіцієнтів рівняння (3.1) і позначення функції

$$\begin{aligned}
A_i &= \frac{D\Delta t}{m(\Delta x)^2} - \frac{V\Delta t}{m\Delta x}, \quad C_{i-1}^{\tau+1} = Y_{i-1}, \quad K_i = \left(\frac{2D\Delta t}{m(\Delta x)^2} - \frac{V\Delta t}{m\Delta x} + 1 \right), \quad C_i^{\tau+1} = Y_i, \\
B_i &= \frac{D\Delta t}{m(\Delta x)^2}, \quad C_{i+1}^{\tau+1} = Y_{i+1}, \quad -C_i^{\tau} = -F_i.
\end{aligned} \quad (3.24)$$

3. Розраховуємо коефіцієнти (3.24) за початковими даними, наведеними в табл. 2.1:

$$A_i = \frac{0,0005 \cdot 250}{0,23 \cdot 0,5^2} - \frac{0,0013 \cdot 250}{0,23 \cdot 0,5} = -0,652,$$

$$K_i = \left(\frac{2 \cdot 0,0005 \cdot 250}{0,23 \cdot 0,5^2} - \frac{0,0013 \cdot 250}{0,23 \cdot 0,5} + 1 \right) = 2,522,$$

$$B_i = \frac{0,0005 \cdot 250}{0,23 \cdot 0,5^2} = 2,174.$$

4. Оцінюємо критерій стійкості:

$$|K_i| \geq |A_i| + |B_i|, \quad (3.25)$$

$$|2,522| \geq |-0,652| + |2,174|,$$

$$|2,522| \geq |2,826|.$$

Якщо він не видержується, то зменшуємо удвічі величину Δt . Розрахунок коефіцієнтів і оцінку критерію стійкості повторюємо.

$$A_i = \frac{0,0005 \cdot 125}{0,23 \cdot 0,5^2} - \frac{0,0013 \cdot 125}{0,23 \cdot 0,5} = -0,175,$$

$$K_i = \left(\frac{2 \cdot 0,0005 \cdot 125}{0,23 \cdot 0,5^2} - \frac{0,0013 \cdot 125}{0,23 \cdot 0,5} + 1 \right) = 1,761,$$

$$B_i = \frac{0,0005 \cdot 125}{0,23 \cdot 0,5^2} = 1,087,$$

$$|1,761| \geq |-0,175| + |1,087|, \quad |1,761| \geq |1,262|.$$

5. Граничну умову Данквертса-Бреннера

$$V(C_{\Pi} - C_0) = D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (3.26)$$

записуємо в скінченнорізницевій формі для розрахункових точок 0, 1

$$V(C_{\Pi} - C_0) = D \frac{C_0 - C_1}{\Delta x}, \quad VC_{\Pi} - VC_0 = D \frac{C_0 - C_1}{\Delta x} \quad (3.27)$$

і зводимо до вигляду

$$C_0 = \alpha_1 C_1 + \beta_1. \quad (3.28)$$

Для цього праву і ліву частини рівняння (3.27) множимо на Δx і ділимо на D :

$$\frac{VC_{\Pi} \Delta x}{D} - \frac{VC_0 \Delta x}{D} = C_0 - C_1. \quad (3.29)$$

6. Розв'язуємо (3.29) відносно C_0 . Для цього переносимо складові, які містять C_0 , у ліву частину рівняння, а інші в праву:

$$-\frac{VC_0 \Delta x}{D} - C_0 = -C_1 - \frac{VC_{\Pi} \Delta x}{D}. \quad (3.30)$$

7. Записуємо (3.30) без мінусів

$$\frac{VC_0\Delta x}{D} + C_0 = C_1 + \frac{VC_{\Pi}\Delta x}{D}, \text{ або} \quad (3.31)$$

$$\left(\frac{V\Delta x}{D} + 1\right)C_0 = C_1 + \frac{VC_{\Pi}\Delta x}{D}. \quad (3.32)$$

8. Ділимо всі складові (3.32) на $\left(\frac{V\Delta x}{D} + 1\right)$:

$$C_0 = \frac{1}{\left(\frac{V\Delta x}{D} + 1\right)}C_1 + \frac{VC_{\Pi}\Delta x}{D\left(\frac{V\Delta x}{D} + 1\right)}. \quad (3.33)$$

9. Із порівняння (3.28) і (3.33) знаходимо

$$\alpha_1 = \frac{1}{\frac{V\Delta x}{D} + 1}, \quad \beta_1 = \frac{VC_{\Pi}\Delta x}{D\left(\frac{V\Delta x}{D} + 1\right)}, \quad (3.34)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\frac{0,0013 \cdot 0,5}{0,0005} + 1} = 0,435, \quad \beta_1 = \frac{0,0013 \cdot 0,01 \cdot 0,5}{0,0005\left(\frac{0,0013 \cdot 0,5}{0,0005} + 1\right)} = 0,006 \cdot$$

10. Подальші дії виконуємо ідентично викладеним у розділі 3.1. Результати розрахунків подаємо в табл. 3.4.

$$\alpha_2 = \frac{B_i}{K_i - \alpha_1 A_i} = \frac{1,087}{1,761 - 0,435 \cdot (-0,175)} = 0,592,$$

$$\alpha_3 = \frac{1,087}{1,761 - 0,592 \cdot (-0,175)} = 0,582,$$

$$\alpha_4 = \frac{1,087}{1,761 - 0,582 \cdot (-0,175)} = 0,583,$$

$$\alpha_5 = \frac{1,087}{1,761 - 0,583 \cdot (-0,175)} = 0,583,$$

$$\beta_2 = \frac{A_i \beta_1 + F_i}{K_i - \alpha_1 A_i} = \frac{(-0,175) \cdot 0,006 + 1}{1,761 - 0,435 \cdot (-0,175)} = 0,544,$$

$$\beta_3 = \frac{(-0,175) \cdot 0,544 + 1}{1,761 - 0,592 \cdot (-0,175)} = 0,485,$$

$$\beta_4 = \frac{(-0,175) \cdot 0,485 + 1}{1,761 - 0,582 \cdot (-0,175)} = 0,491,$$

$$\beta_5 = \frac{(-0,175) \cdot 0,491 + 1}{1,761 - 0,583 \cdot (-0,175)} = 0,490.$$

Послідовність розрахунку вертикального солепереносу

№ розрахункових точок	Координата розрахункової точки	Початкова засоленість C_i^τ , %	α_i	β_i	Прогнозна засоленість $C_i^{\tau+1}$	α_i	β_i	Прогнозна засоленість $C_i^{\tau+2}$
0	0	1,0			0,494			0,488
1	0,5	1,0	0,435	0,006	0,988	0,435	0,006	0,908
2	1,0	1,0	0,592	0,544	0,977	0,592	0,610	0,842
3	1,5	1,0	0,582	0,485	0,845	0,582	0,467	0,644
4	2,0	1,0	0,583	0,491	0,607	0,583	0,409	0,404
5	2,5	0,2	0,583	0,490	0,2	0,583	0,287	0,2

Точка 5 відповідає рівню підземних вод і є гранична. Коефіцієнти α_5 і β_5 дають можливість розрахувати

$$C_4^{\tau+1} = \alpha_5 C_5^{\tau+1} + \beta_5, \quad (3.35)$$

де $C_5^{\tau+1}$ – вміст солей у підземних водах, відсоток щільності сухого ґрунту.

$$C_4^{\tau+1} = \alpha_5 C_5^{\tau+1} + \beta_5 = 0,583 \cdot 0,2 + 0,490 = 0,607 \%,$$

$$C_3^{\tau+1} = \alpha_4 C_4^{\tau+1} + \beta_4 = 0,583 \cdot 0,607 + 0,491 = 0,845 \%,$$

$$C_2^{\tau+1} = \alpha_3 C_3^{\tau+1} + \beta_3 = 0,582 \cdot 0,845 + 0,485 = 0,977 \%,$$

$$C_1^{\tau+1} = \alpha_2 C_2^{\tau+1} + \beta_2 = 0,592 \cdot 0,977 + 0,544 = 0,988 \%,$$

$$C_0^{\tau+1} = \alpha_1 C_1^{\tau+1} + \beta_1 = 0,435 \cdot 0,988 + 0,006 = 0,494 \%,$$

$$C_4^{\tau+2} = 0,583 \cdot 0,2 + 0,287 = 0,404 \%,$$

$$C_3^{\tau+2} = 0,583 \cdot 0,404 + 0,409 = 0,644 \%,$$

$$C_2^{\tau+2} = 0,582 \cdot 0,644 + 0,467 = 0,842 \%,$$

$$C_1^{\tau+2} = 0,592 \cdot 0,842 + 0,610 = 0,908 \%,$$

$$C_0^{\tau+2} = 0,435 \cdot 0,908 + 0,006 = 0,488 \%.$$

Задачу закінчуємо побудовою залежності прогнозного засолення від координати x , визначенням потужності зони розсолення і висновком про інтенсивність розсолення.

Задача вологопереносу

Одновимірне рівняння вертикального вологопереносу в неусталеному режимі має вигляд [6]

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{\partial K}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad (3.36)$$

де θ – об'ємна вологість, частки одиниці; D – коефіцієнт капілярної дифузивності, м²/добу; K – коефіцієнт вологопереносу, аналог коефіцієнта фільтрації в зоні

аерації, м/добу; z – вертикальна просторова координата, м; t – часова координата, діб.

Величини D і K суттєво нелінійно залежать від вологості θ . Для визначення функціональних зв'язків залежностей цих параметрів із вологістю запропоновано ряд експериментальних і теоретичних залежностей. Найчастіше застосовують степеневу функцію [7]

$$K = K_{\phi} \left(\frac{\theta - \theta_0}{m - \theta_0} \right)^n, \quad (3.37)$$

де K_{ϕ} – коефіцієнт фільтрації повністю водонасиченого ґрунту, м/добу; θ – існуюча об'ємна вологість, частки одиниці; θ_0 – кількість зв'язаної води у одиниці об'єму ґрунту, частки одиниці; m – загальна пористість, частки одиниці; n – показник ступеня, для нашого регіону дорівнює 3,5 [7].

Для визначення параметра D застосовуємо експоненціальну залежність [4]

$$D = \alpha e^{\beta \theta}, \quad (3.38)$$

де α і β – константи, визначені експериментально. Для суглинків $\alpha = 1,8 \cdot 10^{-4}$ м²/добу, $\beta = 9$.

Рівняння (3.36) до вигляду (3.1) зводиться таким чином:

$$\begin{aligned} & \frac{(D_{i-1}^{\tau} + D_i^{\tau}) \Delta t}{2(\Delta z)^2} \theta_{i-1}^{\tau+1} - \left[\frac{(D_i^{\tau} + D_{i+1}^{\tau}) \Delta t}{2(\Delta z)^2} - \frac{(D_{i-1}^{\tau} + D_i^{\tau}) \Delta t}{2(\Delta z)^2} + 1 \right] \theta_i^{\tau+1} + \\ & + \frac{(D_i^{\tau} + D_{i+1}^{\tau}) \Delta t}{2(\Delta z)^2} \theta_{i+1}^{\tau+1} = - \left[\theta_i^{\tau} + \frac{(K_{i+1}^{\tau} - K_i^{\tau}) \Delta t}{\Delta z} \right]. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Коефіцієнти рівняння (3.1) обчислюють за формулами

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{(D_{i-1}^{\tau} + D_i^{\tau}) \Delta t}{2(\Delta z)^2}, & K_i &= \frac{(D_{i-1}^{\tau} + 2D_i^{\tau} + D_{i+1}^{\tau}) \Delta t}{2(\Delta z)^2}, \\ B_i &= \frac{(D_i^{\tau} + D_{i+1}^{\tau}) \Delta t}{2(\Delta z)^2}, & F_i &= \frac{(K_{i+1}^{\tau} - K_i^{\tau})}{\Delta z}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Розрахунки починаються з визначення K і D . Початковими даними є коефіцієнт фільтрації K_{ϕ} , загальна пористість m , кількість зв'язаної води θ_0 та існуюча вологість ґрунтів θ . У нашому прикладі це суглинки, для яких $K_{\phi} = 0,1$ м/добу, $m = 0,4$ частки одиниць, $\theta_0 = 0,05$ частки одиниць. Величини θ за всіма розрахунковими точками наведені в табл. 3.5.

Характеристика вертикального вологопереносу

№ розрахункових точок	Глибина розрахункової точки від поверхні землі, м	Початкова об'ємна вологість θ_i^r , ч.о.	Коефіцієнт дифузивності D , м ² /добу	Коефіцієнт вологопереносу K , м/добу	Швидкість вертикального вологопереносу V , м/добу	Прогнозна вологість θ_i^{r+1} , t=365 діб
0	0	0,179	0,0009	0,003		
1	0,1	0,182	0,00092	0,0033	0,0031	
2	0,2	0,183	0,00093	0,0034	0,0033	0,163
3	0,3	0,184	0,00094	0,0035	0,0034	0,201
4	0,4	0,190	0,00099	0,004	0,0037	0,185
5	0,5	0,195	0,00104	0,0046	0,0042	0,181
6	0,6	0,196	0,00105	0,0047	0,0046	0,183
7	0,7	0,210	0,00119	0,0064	0,0054	0,198
8	0,8	0,211	0,0012	0,0066	0,0065	0,202
9	0,9	0,230	0,00142	0,0097	0,0079	0,218
10	1,0	0,232	0,00145	0,0101	0,0098	0,219

Розв'язання задачі:

1. Визначаємо K і D за формулами (3.37) і (3.38).

$$K_0 = 0,1 \left(\frac{0,179 - 0,05}{0,4 - 0,05} \right)^{3,5} = 0,003 \text{ м/добу}, \quad D_0 = 1,8 \cdot 10^{-4} \cdot e^{9 \cdot 0,179} = 0,0009 \text{ м}^2/\text{добу},$$

$$K_1 = 0,1 \left(\frac{0,182 - 0,05}{0,4 - 0,05} \right)^{3,5} = 0,0033 \text{ м/добу}, \quad D_1 = 1,8 \cdot 10^{-4} \cdot e^{9 \cdot 0,182} = 0,00092 \text{ м}^2/\text{добу},$$

$$K_2 = 0,1 \left(\frac{0,183 - 0,05}{0,4 - 0,05} \right)^{3,5} = 0,0034 \text{ м/добу}, \quad D_2 = 1,8 \cdot 10^{-4} \cdot e^{9 \cdot 0,183} = 0,00093 \text{ м}^2/\text{добу},$$

$$K_3 = 0,1 \left(\frac{0,184 - 0,05}{0,4 - 0,05} \right)^{3,5} = 0,0035 \text{ м/добу}, \quad D_3 = 1,8 \cdot 10^{-4} \cdot e^{9 \cdot 0,184} = 0,00094 \text{ м}^2/\text{добу},$$

$$K_4 = 0,1 \left(\frac{0,190 - 0,05}{0,4 - 0,05} \right)^{3,5} = 0,004 \text{ м/добу}, \quad D_4 = 1,8 \cdot 10^{-4} \cdot e^{9 \cdot 0,190} = 0,00099 \text{ м}^2/\text{добу},$$

$$K_5 = 0,1 \left(\frac{0,195 - 0,05}{0,4 - 0,05} \right)^{3,5} = 0,0046 \text{ м/добу}, \quad D_5 = 1,8 \cdot 10^{-4} \cdot e^{9 \cdot 0,195} = 0,00104 \text{ м}^2/\text{добу},$$

$$K_6 = 0,1 \left(\frac{0,196 - 0,05}{0,4 - 0,05} \right)^{3,5} = 0,0047 \text{ м/добу}, \quad D_6 = 1,8 \cdot 10^{-4} \cdot e^{9 \cdot 0,196} = 0,00105 \text{ м}^2/\text{добу},$$

$$K_7 = 0,1 \left(\frac{0,210 - 0,05}{0,4 - 0,05} \right)^{3,5} = 0,0064 \text{ м/добу}, \quad D_7 = 1,8 \cdot 10^{-4} \cdot e^{9 \cdot 0,210} = 0,00119 \text{ м}^2/\text{добу},$$

$$K_8 = 0,1 \left(\frac{0,211 - 0,05}{0,4 - 0,05} \right)^{3,5} = 0,0066 \text{ м/добу}, \quad D_8 = 1,8 \cdot 10^{-4} \cdot e^{9 \cdot 0,211} = 0,0012 \text{ м}^2/\text{добу},$$

$$K_9 = 0,1 \left(\frac{0,230 - 0,05}{0,4 - 0,05} \right)^{3,5} = 0,0097 \text{ м/добу}, \quad D_9 = 1,8 \cdot 10^{-4} \cdot e^{9 \cdot 0,230} = 0,00142 \text{ м}^2/\text{добу},$$

$$K_{10} = 0,1 \left(\frac{0,232 - 0,05}{0,4 - 0,05} \right)^{3,5} = 0,0101 \text{ м/добу}, \quad D_{10} = 1,8 \cdot 10^{-4} \cdot e^{9 \cdot 0,232} = 0,00145 \text{ м}^2/\text{добу}.$$

2. Швидкість вертикального вологопереносу розраховуємо за формулою

$$V_{i,i+1}^\tau = -D_{\text{ср}}^\tau \cdot \frac{\theta_i^\tau - \theta_{i+1}^\tau}{z_i - z_{i+1}} + K_{\text{ср}}^\tau, \quad (3.41)$$

$$V_{0,1}^\tau = -\frac{0,0009 + 0,00092}{2} \cdot \frac{0,179 - 0,182}{0 - 0,1} + \frac{0,003 + 0,0033}{2} = 0,0031 \text{ м/добу},$$

$$V_{1,2}^\tau = -0,000925 \cdot \frac{0,182 - 0,183}{0,1 - 0,2} + 0,00335 = 0,0033 \text{ м/добу},$$

$$V_{2,3}^\tau = -0,000935 \cdot \frac{0,183 - 0,184}{0,2 - 0,3} + 0,00345 = 0,0034 \text{ м/добу},$$

$$V_{3,4}^\tau = -0,000965 \cdot \frac{0,184 - 0,190}{0,3 - 0,4} + 0,00375 = 0,0037 \text{ м/добу},$$

$$V_{4,5}^\tau = -0,001015 \cdot \frac{0,190 - 0,195}{0,4 - 0,5} + 0,0043 = 0,0042 \text{ м/добу},$$

$$V_{5,6}^\tau = -0,001045 \cdot \frac{0,195 - 0,196}{0,5 - 0,6} + 0,00465 = 0,0046 \text{ м/добу},$$

$$V_{6,7}^\tau = -0,00112 \cdot \frac{0,196 - 0,210}{0,6 - 0,7} + 0,00555 = 0,0054 \text{ м/добу},$$

$$V_{7,8}^\tau = -0,001195 \cdot \frac{0,210 - 0,211}{0,7 - 0,8} + 0,0065 = 0,0065 \text{ м/добу},$$

$$V_{8,9}^\tau = -0,00131 \cdot \frac{0,211 - 0,230}{0,8 - 0,9} + 0,00815 = 0,0079 \text{ м/добу},$$

$$V_{9,10}^\tau = -0,001435 \cdot \frac{0,230 - 0,232}{0,9 - 1,0} + 0,0099 = 0,0098 \text{ м/добу}.$$

3. Коефіцієнти α_1 і β_1 знаходимо з граничної умови III роду на поверхні землі $z = 0$:

$$-\frac{\partial}{\partial z}(D\theta) = \gamma(\theta - \theta_0), \quad (3.42)$$

$$\alpha_1 = \frac{D_1 + D_0}{D_1 + D_0 - 2\Delta z\gamma}, \quad \beta_1 = \frac{\gamma\theta_0}{\gamma - \frac{D_1 + D_0}{2\Delta z}}. \quad (3.43)$$

4. Прогнозні величини $\theta_i^{\tau+1}$ розраховують аналогічно розглянутим у розділах 3.2, 3.3:

$$\theta_9^{\tau+1} = \alpha_{10}\theta_{10} + \beta_{10}.$$

За результатами розрахунків будуюмо графіки.

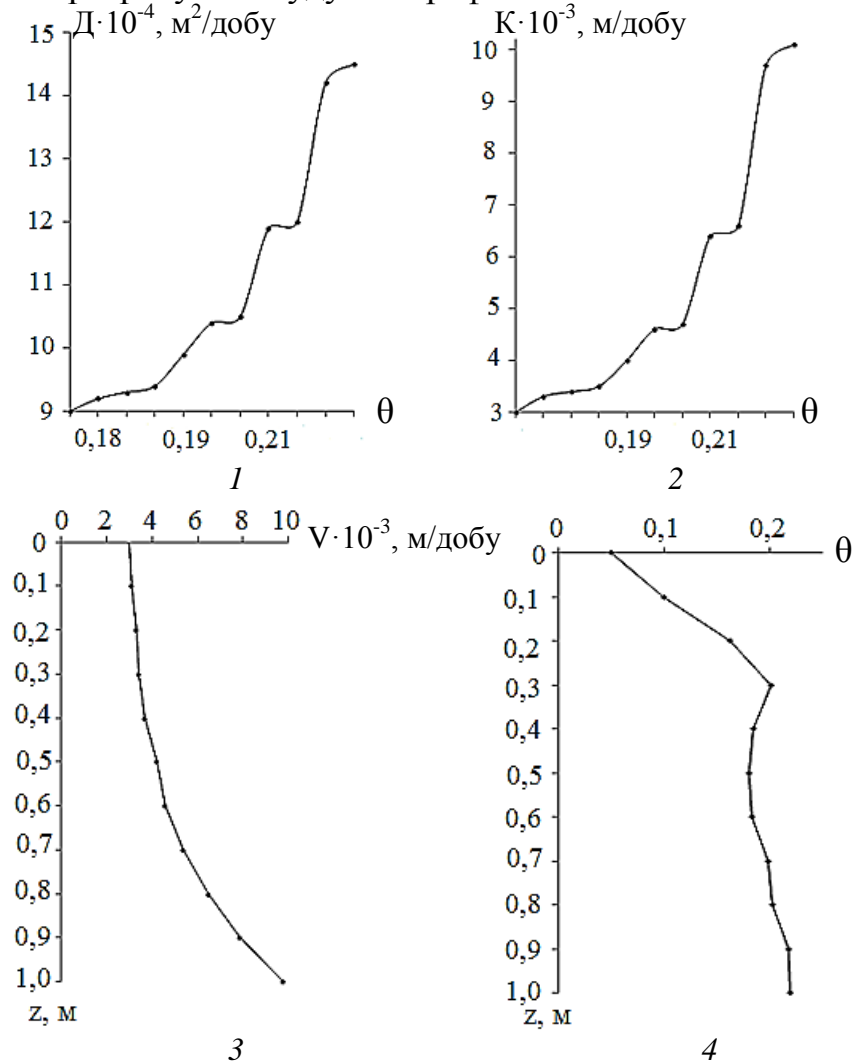


Рис. 3.2. Характеристика волого переносу:
 1 – коефіцієнт Д; 2 – коефіцієнт К; 3 – θ ; 4 – V.

Висновок. Швидкість вертикального вологопереносу суттєво залежить від коефіцієнта вологопереносу й незначно від коефіцієнта дифузивності ґрунтової вологи.

Таблиця 3.6

Варіанти завдань до лабораторної роботи

№ завдання	Гідродинамічний напір першої границі $H_1, \text{ м}$	Гідродинамічний напір другої границі $H_2, \text{ м}$	Величина інфільтраційного живлення $W, \text{ м/добу}$	Водопровідність $T, \text{ м}^2/\text{добу}$	Відстань між границями (межами) $L, \text{ м}$
1	21	36	$2 \cdot 10^{-4}$	120	650
2	26	47	$3,5 \cdot 10^{-3}$	90	605
3	11	26	$4,8 \cdot 10^{-4}$	112	707
4	12	41	$5,9 \cdot 10^{-3}$	117	704

№ завдання	Гідродинамічний напір першої границі H_1 , м	Гідродинамічний напір другої границі H_2 , м	Величина інфільтраційного живлення W , м/добу	Водопровідність T , м ² /добу	Відстань між границями (межами) L , м
5	18	39	$1,8 \cdot 10^{-4}$	90	650
6	14	42	$9,3 \cdot 10^{-3}$	142	728
7	22	47	$9,9 \cdot 10^{-3}$	174	805
8	10	17,3	$1,3 \cdot 10^{-4}$	123	706
9	8,0	15,2	$1,2 \cdot 10^{-3}$	106	604
10	19,2	48,7	$1,9 \cdot 10^{-3}$	115	800

Контрольні запитання

1. У яких випадках застосовують числові методи для розв'язання гідрогеологічних задач?
2. Які види гідрогеологічних задач розв'язують методом прогонки?
3. Яким чином у методі прогонки враховується інфільтраційне живлення?
4. Який порядок має рівняння в скінченнорізницевій формі?
5. Як ліквідувати нестійкість рекурентних формул?

Список використаної літератури

1. Скабалланович, И.А. Гидрогеологические расчеты [Текст] / И.А. Скабалланович. – М.: Углетехиздат, 1954. – 388с.
2. Карплюс, У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля [Текст] / У. Карплюс. – М.: ИЛ, 1962. – 487с.
3. Самарский, А.А. Теория разностных схем [Текст] / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 653с.
4. Евграшкіна, Г.П. Влияние горнодобывающей промышленности на гидрогеологические и почвенно-мелиоративные условия территорий [Текст] / Г.П. Евграшкіна. – Д.: Монолит, 2003. – 200с.
5. Євграшкіна, Г.П. Вивчення прогнозування гідрогеологічних процесів методами математичного моделювання [Текст] / Г.П. Євграшкіна, Н.П. Шерстюк. – Д.: Моноліт, 2004. – 112с.
6. Шестаков, В.М. Динамика подземных вод [Текст] / В.М. Шестаков. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – 368с.
7. Аверьянов, С.Ф. Борьба с засолением орошаемых земель [Текст] / С.Ф. Аверьянов – М.: Колос, 1978. – 288с.

Зміст

Вступ.....	3
Лабораторна робота 1. Метод перетинів.....	3
Лабораторна робота 2. Метод Джонсона.....	11
Лабораторна робота 3. Метод прогонки.....	19
Список використаної літератури.....	31

Темплан 2014, поз. 41

**Методичні вказівки
до виконання лабораторних робіт із курсу
«Математичне моделювання»**

Укладачі: д-р. геол. наук, проф. Г.П. Євграшкіна
зав. лаб. О.Є. Калинкіна

Редактор І.І. Стадник
Техредактор Л.П. Замятіна
Коректор А.А. Гриженко

Підписано до друку 17.02.14. Формат 60×84/16. Папір друкарський.
Друк плоский. Ум. друк. арк. 1,9. Ум. фарбовідб. 1,9. Обл.-вид. арк. 1,6.
Тираж 100 пр. Зам. №

РВВ ДНУ, просп. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010.
Друкарня «Ліра», пл. Десантників, 1, м. Дніпропетровськ, 49038.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру серія ДП № 14 від 13.07.2000 р.